Санкт-Петербургский государственный университет
Высшая школа менеджмента

Н. А. Зенкевич, Л. А. Петросян, Д. В. К. Янг

ДИНАМИЧЕСКИЕ ИГРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕНЕДЖМЕНТЕ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство «Высшая школа менеджмента»
2009

ББК 65.050.2
УДК 518.9,517.9,681.3.07
З56

Рецензенты:
чл.-корр. РАН, д-р техн. наук, проф. **Д.А.Новиков**
Институт проблем управления РАН;
д-р физ.-мат. наук, проф. **В.В. Мазалов**
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН

Печатается по решению Ученого Совета
Высшей школы менеджмента
Санкт-Петербургского государственного университета

Зенкевич Н.А., Петросян Л.А., Янг Д.В.К.
Динамические игры и их приложения в менеджменте: учеб. пособие / Н.А.Зенкевич, Л.А. Петросян, Д.В.К. Янг; Высшая школа менеджмента СПбГУ. — СПб.: Изд-во «Высшая школа менеджмента», 2009.— 415 с.
ISBN 978-5-9924-0026-7

Предлагаемое учебное пособие впервые в мировой и отечественной практике рассматривает наиболее актуальные теоретико-игровые модели конфликтно-управляемых процессов в менеджменте, развивающихся во времени. Пособие знакомит читателя с основами теории динамических и дифференциальных игр и их приложениями к проблемам менеджмента. Основанной упор делается на изложении наиболее современных результатов и методов, которые на сегодняшний день не могут быть найдены в учебной и монографической литературе, а опубликованы лишь в специальных научных журналах.

Учебное пособите адресовано в первую очередь студентам и аспирантам школ бизнеса и факультетов прикладной математики, изучающим курс «Теория отраслевой организации», а также научным работникам, специализирующимся в направлении приложений теории игр в менеджменте и социально-экономической сфере.

ISBN 978-5-9924-0026-7

Оглавление

Введение

Для оценки качества менеджмента и разработки методологии его оптимизации используются методы математического и компьютерного моделирования. В том случае, когда управленческие решения принимаются одним лицом и их результат не зависит от действий других сторон, в качестве аппарата математического моделирования может быть с успехом использована теория оптимального управления и оптимизации. В то же время, в подавляющем большинстве случаев даже когда можно условно предположить, что решение принимается одним лицом, нельзя гарантировать, что его результат не будет зависеть от действий других сторон или лиц так или иначе в нем заинтересованных. В этом случае необходимо учитывать наличие несовпадающих, а в ряде случаев и конфликтующих интересов у сторон, заинтересованных в результатах менеджмента. Игнорирование этого обстоятельства может привести, и в действительности приводит, к невозможности полной реализации управленческих решений, а, следовательно, и к недостижению результатов, на которые эти решения были направлены.

При попытках моделирования подобных ситуаций пользуются методами и подходами теории игр. Однако подавляющее большинство исследований в области теории игр касается, так называемых однократных или мгновенных игр, в которых конфликт между сторонами происходит мгновенно, и таким образом совершенно не учитывается временной фактор. В то же время понятно, что реальные процессы принятия решений (реальный менеджмент) происходят на достаточно большом временном интервале, когда в каждый текущий момент времени приходится учитывать результаты предыдущих решений и только на этой основе вырабатывать соответствующее управление. Именно поэтому подходящими математическими моделями подобных процессов могут быть динамические и дифференциальные игры, которые с одной стороны учитывают конфликтность процесса принятия решений, а с другой — необходимость его моделирования на достаточно продолжительном временном промежутке.

На практике долгосрочные управленческие решения вырабатываются на основе потребностей, выявляемых на всех уровнях системы управления. В результате из большого числа возможных вариантов, на основе некоторого трудно формализуемого алгоритма, выбирается одно решение, подлежащее дальнейшей реализации. Этот плохо формализуемый и трудно улавливаемый алгоритм выбора по существу является реализацией установившегося в данной системе менеджмента принципа оптимальности. Здесь мы сталкиваемся с такой интересной проблемой как восстановление принципа оптимальности, лежащего в основе принятия решений по наборам реализованных решений. Независимо от того, в какой степени мы сумеем продвинуться в решении этой проблемы, сам факт наличия такого принципа оптимальности не вызывает сомнения. В то же время свойства этого принципа оптимальности мы можем наблюдать и без проведения глубокого исследования. Отметим два, на наш взгляд, наиболее важных свойства, присутствующих и довлеющих на принятие долгосрочных решений. Первое — необходимость оценки качества принимаемого решения по нескольким критериям. Второе — различная оценка исхода решения разными сторонами, участвующими в выработке решения. Это наводит нас на мысль о том, что принцип оптимальности, лежащий в основе выбора решения, имеет теоретико-игровой, конфликтный характер. Здесь так же как и в теоретико-игровых моделях несколько сторон влияют на принятие решения в соответствии со своими, не обязательно совпадающими интересами.

Прогресс в технологиях, коммуникациях, промышленной организации, международной торговле, экономической интеграции и политических реформах способствовал созданию быстро развивающихся социально-экономических связей, включающих межрегиональную и межгосударственную деятельность, а также взаимодействие участвующих объектов и субъектов. С точки зрения современного менеджмента, исключительно важно осознать и реально использовать взаимосвязь и взаимозависимость принимаемых решений в подобных обстоятельствах. Стратегический аспект принятия решений особенно важен в таких областях как торговые переговоры, иностранные и национальные инвестиции, международный контроль состояния окружающей среды, интеграция и развитие рынков, технологические и продуктовые инновации, маркетинг, региональная кооперация, политика в области обороны и контроль над вооружениями.

Теория игр существенно подняла наш уровень понимания процессов принятия решений. Однако усложнение социально-экономических и политических проблем требует нахождения новых аналитических методов и методологических подходов как в самой теории, так и при исследовании отдельных задач в приложениях. Менеджмент, социальные науки, экономика и финансы и есть те области, в которых использование методологии теории игр может дать значительную отдачу именно из-за конфликтного характера возникающих здесь проблем. Исследования следует направить на более реалистический и релевантный анализ процессов принятия решений в социально-экономической сфере, при этом теоретико-игровой подход поможет особенно эффективно исследовать и решать задачи и проблемы управления.

Как мы уже отмечали, при моделировании конфликтно-управляемых процессов в социально-экономической сфере и менеджменте наиболее реалистичными являются математические модели, базирующиеся на теории динамических и дифференциальных игр. Теория дифференциальных (динамических) игр возникла в пятидесятые годы прошлого века. Основополагающей работой в этой области считается монография Р. Айзекса «Дифференциальные игры», вышедшая в свет в 1965 г. [Isaacs, 1965]. Первые отечественные работы появились в 1965 г. [Красовский, 1966; Петросян, 1965; Понтрягин, 1967]. Однако до середины шестидесятых годов исследовались лишь антагонистические дифференциальные игры, моделирующие конфликт между двумя сторонами, имеющими прямо противоположные интересы. Понятно, что антагонистические дифференциальные игры могли иметь приложения лишь в ограниченном классе задач, возникающих при военном столкновении сторон (перехват летательных аппаратов, обнаружение и уничтожение подводных подвижных объектов, оптимизация распределения ресурсов при локальных военных столкновениях и т. п.).

Для моделирования социально-экономических процессов необходимо было разработать теорию неантагонистических дифференциальных игр. Первые работы в этой области появились в конце шестидесятых годов [Петросян, Мурзов, 1967; Case 1967; Starr, Ho, 1969a, 1969b]. В этих работах исследовались некооперативные дифференциальные игры со многими участниками, и поэтому в качестве принципа оптимальности использовалось равновесие по Нэшу. Основополагающие результаты, касающиеся существования и построения решений в неантагонистических дифференциальных играх, получены в работах отечественных авторов [Жуковский, Чикрий, 1994; Клейменов, 1993; Захаров, 1988; Малафеев, 1982; Чистяков, 1992]. В последующих работах полученные результаты применялись для исследования различных задач социально-экономического характера [Haurie, Krawczyk, Roche, 1976; Jorgensen, 1985; Jorgensen, Sorger, 1990; Jorgensen, Zaccour, 2002; Kaitala, 1993; Sorger, 1989; Yeung, 1992, 1994].

На ранней стадии развития теории динамических игр не рассматривалась возможность кооперации участников конфликтно-управляемого процесса с целью достижения более высоких показателей. И хотя статическая теория таких игр была хорошо развита, динамическому аспекту кооперативного поведения не было уделено должного внимания. Теория кооперативных игр дает возможность выработки социально-оптимальных коалиционно-эффективных решений в задачах со стратегически обусловленными действиями. Формализация условий кооперации и связанного с этим оптимального поведения участников конфликтно-управляемого процесса (игроков) является фундаментальным основанием этой теории. Однако для сохранения кооперации и принятых соглашений требуется выполнение более жесткого условия: в процессе реализации решения принцип оптимальности, на основе которого вырабатывалось первоначальное решение, должен оставаться состоятельным в течение всего процесса реализации (генерировать в определенном смысле адекватные решения в текущих подзадачах, т. е. в каждый момент времени вдоль определенной заранее оптимальной траектории процесса). Это условие носит название «динамической устойчивости» или «состоятельности во времени». Иными словами, свойство динамической устойчивости решения (состоятельности во времени или временной состоятельности) кооперативной динамической игры означает, что при развитии игры вдоль кооперативной траектории, игроки следуют одному и тому же принципу оптимальности в каждый момент времени (в каждой подзадаче с начальными условиями на этой оптимальной траектории) и поэтому не имеют побуждения отклониться от первоначально выбранного оптимального решения в течение всей игры.

При исследовании кооперативных дифференциальных игр в конце 70-х годов нами было обнаружено и доказано, что если специальным образом не производить регуляризацию принципа оптимальности, то выбранное в начале процесса «оптимальное решение» в ходе его реализации почти всегда теряет свою «оптимальность» и поэтому не может оставаться основополагающим принципом дальнейшего развития. Данное явление имеет место даже без каких-либо внешних воздействий или изменения интереса участников. Это и есть нарушение динамической устойчивости или временной состоятельности. Нами впоследствии были разработаны методы регуляризации кооперативного решения, приводящие к состоятельному во времени принципу оптимальности. Несколько позже нарушение динамической устойчивости было обнаружено при решении одной специальной задачи зарубежными авторами Ф. Кидландом и Е. Прескоттом [Kydland, Prescott, 1977], получившими Нобелевскую премию в области экономики в 2004 г.

Динамическая устойчивость (временная состоятельность) принципов оптимальности в дифференциальных играх подробно исследовалась в работах специалистов по теории игр. А.Ори [Haurie, 1976] заметил временную несостоятельность арбитражной схемы Нэша при ее использовании в качестве принципа оптимальности в дифференциальной игре. Л.А. Петросян [Петросян, 1977] математически формализовал понятие динамической устойчивости (временной состоятельности), ввел понятие «процедуры распределения дележа» для кооперативных решений [Петросян, Данилов, 1979]. В работе [Tolwinski, Haurie, Leitmann, 1986] исследовано кооперативное равновесие в дифференциальных играх, когда система угроз обеспечивает развитие игры по кооперативному пути. В дальнейшем, в работах [Petrosjan, 1993; Petrosjan, Zenkevich, 1996] проведен подробный анализ динамической устойчивости в кооперативных дифференциальных играх и предложен метод регуляризации для построения динамически устойчивых (состоятельных во времени) решений.

К сожалению, в настоящее время в мировой учебной литературе нельзя найти даже англоязычного учебного пособия, которое смогло бы раскрыть сложную проблематику приложений теоретико-игровых методов в менеджменте. Положение здесь таково, что большинство англоязычных и отечественных учебных пособий в этом направлении лишь поверхностно рассматривают прикладные аспекты теории на уровне модельных примеров и не касаются наиболее актуальных теоретико-игровых моделей конфликтно-управляемых процессов в менеджменте.

Предлагаемое учебное пособие, как нам представляется, восполняет этот пробел. Изложение построено таким образом, что для понимания основ теории читатель может обойтись без предварительных знаний по теории игр (хотя, конечно, начальное знакомство с понятиями теории игр было бы желательно).

Как пользоваться учебным пособием. Общая структура книги

В первых двух главах приводятся основные понятия и некоторые приложения статической теории игр, которая к настоящему времени стала классической. Здесь изложение сопровождается примерами из теории и практики менеджмента, хотя из-за статического характера их скорее следует понимать как модельные примеры для иллюстрации основополагающих результатов динамической теории.

Первой главы учебного пособия достаточно, чтобы получить квалифицированное представление о теории игр как теории математических моделей принятия решения в условиях конфликта участвующих сторон. Она раскрывает основные положения современной статической теории игр и может служить основой для учебного курса по теории игр для студентов управленческого и экономического профиля. Вместе с тем материал этой главы может самостоятельно изучить каждый аспирант, ранее не знакомый с теорией игр и предполагающий использовать теоретико-игровые модели в своем исследовании.

Во второй главе книги рассмотрены различные приложения теории игр. Она может быть рекомендована для самостоятельного изучения в магистратуре и аспирантуре по направлениям, включающим математическое и компьютерное моделирование задач менеджмента.

В третьей главе в доступной для студентов старших курсов форме приводятся и обосновываются основные результаты теории дискретных многошаговых игр с полной информацией, на которой фактически базируется современная теория неантагонистичеких дифференциальных игр, являющаяся с нашей точки зрения одним из основных математических инструментов для моделирования долгосрочных процессов в современном менеджменте. Без знакомства с результатами этой главы читателю будет практически невозможно осознать методологию теоретико-игрового подхода, который развит в последующих главах. Третья глава является обязательной для понимания и исследования динамических теоретико-игровых моделей.

Сложный математический аппарат появляется впервые в четвертой главе, когда динамика процесса описывается системой дифференциальных уравнений. Однако надо понимать, что серьезные результаты в области моделирования процессов в менеджменте невозможны без использования аппарата дифференциальных уравнений и стохастических дифференциальных уравнений. В этом можно убедиться, пролистав последние номера журналов «Econometrica» или «Management Science». На сегодняшний день наиболее ощутимые результаты как с точки зрения теории, так и с точки зрения практических приложений, получены при исследовании моделей, описываемых линейно-квадратичными дифференциальными играми. Решению данного класса игр и посвящена эта глава.

Изучение теории игр в объеме первых четырех глав достаточно для понимания современной научной и учебной литературы (отечественной и иностранной) в области экономики и менеджмента, если в ней приводится анализ и решение теоретико-игровых моделей.

Для аспирантов экономического и управленческого профилей последующие главы (главы 5, 6, 7, 8) представляют интерес с точки зрения рассматриваемых постановок задач, исследуемых проблем, доказанных результатов, а также в плане моделирования конкретных проблем менеджмента. Вместе с тем именно эти главы представляют особый интерес и для аспирантов факультетов математических и технических специальностей, занимающихся математическим моделированием, развитием математических методов моделирования и их практическим применением. Этот интерес обусловлен научной новизной и актуальностью проблематики, а также наличием многочисленных нерешенных теоретических и прикладных проблем.

В пятой главе рассматриваются кооперативные дифференциальные игры в форме характеристичекой функции. Даются определения основных понятий, исследована динамическая устойчивость основных принципов оптимальности кооперативной теории. Здесь вводится фундаментальное понятие процедуры распределения дележа (ПРД), которая обеспечивает динамическую устойчивость принципа оптимальности. Теоретические результаты иллюстрируются на решении задачи управления загрязнением окружающей среды как в кооперативном, так и коалиционном вариантах. В первом случае строится динамически устойчивый вектор Шепли, во втором — динамически устойчивый PMS-вектор.

В шестой главе специально исследованы кооперативные дифференциальные игры двух лиц бесконечной продолжительности при наличии дисконтирования. Помимо теоретических результатов, касающихся нахождения динамически устойчивых кооперативных решений, и соответствующих процедур регуляризации, приведены решения конкретных задач прикладного характера в явной аналитической форме. Особое место занимает случай, когда выигрыши игроков нетрансферабельны, т.е. они не могут быть измерены в единой шкале. Такие задачи также достаточно актуальны в менеджменте, поскольку не всегда результат управленческого решения может быть оценен в денежных единицах. В главе приведены модельные примеры с решением прикладного характера.

Подход, основанный на исследовании классических характеристических функций, предполагает, что не входящие в коалицию игроки действуют против объединившихся в коалицию игроков. В прикладных задачах такое предположение часто не реалистично. В седьмой главе рассмотрен другой подход к определению кооперативной дифференциальной игры. В рамках данного подхода формулируются принципы оптимальности и исследуется их позиционная состоятельность, что является обобщением временной состоятельности на случай стохастической дифференциальной игры. Проанализирована и решена задача добычи полезного ресурса конкурирующими фирмами при наличии случайных воздействий.

Последняя, восьмая глава, так же как и предыдущая, посвящена наиболее сложному случаю, в котором участвуют несколько игроков (два или более), когда на развитие конфликтно-управляемого процесса помимо решений принимаемых участниками конфликта влияют случайные факторы. Такого рода задачи описываются стохастическими дифференциальными играми. Для чтения этой главы желательно знакомство с основами теории стохастических дифференциальных уравнений, но поместить их в учебное пособие не представилось возможным, поскольку это загромоздило бы и без того достаточно сложный материал. В то же время авторы считают не только возможным, но и необходимым включение данной главы, поскольку представленная здесь теория является с одной стороны наиболее современным подходом к моделированию сложных процессов происходящих в менеджменте, а с другой — дает возможность получения решений в аналитическом виде в динамической задаче управления совместным предприятием и задаче оптимального использования ограниченного природного ресурса.

Математические требования

Мы старались изложить теорию игр в удобочитаемой форме, нередко заменяя доказательства приводимых теорем ссылкой на литературный первоисточник. При этом математическая сложность повышается постепенно.

Многообразие и широта представленных моделей не всегда позволяла приводитьб строгие математические обоснования и доказательства, поэтому в ряде случаев (главы 5–8) авторы были вынуждены изложить материал в упрощенном виде.

Для понимания материала первой и второй главы не требуется глубокой математической подготовки. Достаточно уметь оперировать основными понятиями дифференциального исчисления, включая безусловную и условную оптимизацию и начальное знакомство с теорией вероятностей.

При изучении третьей главы желательны начальные знания по динамическому программированию и цепям Маркова.

В четвертой, пятой и шестой главах используется аппарат дифференциальных уравнений. Поэтому предварительное знакомство с теорией дифференциальных уравнений и оптимального управления желательно.

При изучении седьмой и восьмой глав также требуется знание основ теории стохастических дифференциальных уравнений.

Учебное пособие адресовано аспирантам Высшей школы менеджмента СПбГУ и других учебных заведений аналогичного профиля. Оно может быть рекомендовано также студентам и аспирантам, использующим математические методы в социально-экономических науках.

Авторы благодарят Артема Александровича Седакова за выполнение всех работ, связанных с оформлением рукописи.

Глава 1
Статические игры

§ 1.1. Игры в нормальной форме

Как же выглядят конфликты, т. е. игры, глазами математиков? Для того, чтобы ответить на этот вопрос прежде всего следует строго формализовать само понятие игры, т. е. дать его математическое определение.

Введем понятие игры в нормальной форме. Н. Н. Воробьевым [Воробьев, 1973] предложена общая формализация игры, в которую вписываются многие мыслимые и реальные конфликты с конечным числом участников. В этой формализации игра представляется как конечный набор определенных элементов.

Определение 1.1.1. *Игрой в нормальной форме называется набор объектов вида:*

$$\Gamma = \langle N; X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n; K_1, \ldots, K_i, \ldots, K_n \rangle . \tag{1.1}$$

Здесь Γ — обозначение игры, $N = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$ — множество игроков, $X_i = \{x_i\}$ — множество стратегий игрока i, $K_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ — функция выигрыша игрока i, принимающая вещественные значения. Значение функции выигрыша представляет собой выигрыш (или полезность), который получает игрок i, если игроками используются стратегии $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Игра происходит следующим образом. Игроки одновременно и независимо друг от друга (не имея информации о действиях других игроков) выбирают свои стратегии x_i из множества всех своих возможных стратегий X_i. В результате формируется набор стратегий

$$x_N = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n), x_N \in X_N \equiv \prod_{i \in N} X_i, \tag{1.2}$$

называемый в теории игр *ситуацией*. Заметим, что в (1.2) символ $\prod_{i \in N} X_i$ означает декартово произведение множеств X_i. При этом само множество X_N именуют *множеством всех ситуаций* в данной игре.

После выбора стратегий игроками игра прекращается, и каждый из игроков i получает выигрыш, который вычисляется как значение его функции выигрыша K_i в этой ситуации x_N, то есть величину $K_i(x_N) = K_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.

Неискушенному в математике человеку на первый взгляд может показаться, что приведенная модель игры слишком упрощена и не охватывает даже реальные салонные игры. Однако это не так. Более того, достаточно широкий спектр различного рода конфликтов, в которых участвует конечное число участников, укладывается в эту схему.

Наиболее сложным аспектом при построении математической модели конфликта является описание множеств стратегий $\{X_i\}$ и математически адекватное выражение предпочтений игроков через их функции выигрыша, а также аналитическое выражение этой функции как функции выбираемых стратегий.

Если обратиться к шахматам, то в этом случае под стратегией уместно понимать некоторое всеобъемлющее правило, которое каждой мыслимой позиции на шахматной доске предписывает однозначное действие — ход игрока в этой позиции. В этом случае понятно, что пара стратегий игроков в шахматах однозначно определяет исход игры. Теперь, полагая величину выигрыша выигрывающего игрока равной единице, величину выигрыша проигравшего игрока — минус единице, а в случае ничьей, приписав обоим игрокам выигрыш, равный 0, мы строим функцию выигрыша и, тем самым, завершаем формализацию математической модели шахматной игры. Здесь следует отдавать отчет, что подобное построение носит чисто умозрительный характер.

При этом ясно, что для выписывания и запоминания даже одной стратегии в шахматной игре не хватит памяти ни одного из существующих компьютеров. С этим обстоятельством следует считаться при моделировании многих конфликтных процессов в экономике и социальной сфере, имеющих динамический характер.

Реальные конфликтные процессы отличает от шахмат и то обстоятельство, что в них оказываются вовлеченными не два, а значительно большее число участников, и далеко не всегда позиция игры (в случае шахмат — это расположение фигур на доске при совершении хода плюс вся предыстория этого расположения фигур, а в социально-экономических конфликтах — состояние рынка или финансовое состояние фирмы в каждый момент времени) полностью известна всем вовлеченным в конфликт сторонам. Это приближает природу социально-экономических конфликтов к карточным играм, несколько более сложным с математической точки зрения. В карточной игре позиция игры (расклад карт у противников) не известна полностью игрокам. Решения на каждом шаге игры приходится принимать лишь на основе имеющейся неполной информации, при этом информированность игроков существенным образом сказывается на величине выигрыша каждого из игроков.

Пример 1.1.1. (*Аукцион неделимого товара* [Мулен, 1985]). На аукцион выставлен товар по начальной цене c. Участники аукциона могут рассматриваться как игроки. Обозначим каждого участника индексом i, и пусть $i \in \{1, \dots, n\} = N$, где N — множество всех участников аукциона. Ценность товара для каждого участника оценивается величиной v_i. Будем предполагать, что

$$c \leq v_n \leq \dots \leq v_2 \leq v_1.$$

Участники независимо друг от друга назначают цену $x_i \geq c$ (аукцион закрытого типа). Цена x_i является стратегией участника i. Победителем является тот участник, который назначает максимальную цену (аукцион на повышение). Рассмотрим два типа аукционов. Отличие двух аукционов заключается в том, какой выигрыш должен получить победитель. Обсудим эти вопросы более детально.

а) **Аукцион первой цены.** Множество стратегий каждого участника есть $X_i \equiv X = [c, +\infty)$. Пусть в ходе аукциона реализовалась ситуация $x_N = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$. Обозначим множество игроков, назначивших максимальную цену, через

$$w(x_N) = \{i \mid x_i = \max_j x_j\}.$$

Функцию выигрыша i-го участника аукциона определим следующим образом:

$$K_i(x_N) = \begin{cases} v_i - x_i, & i = \min\limits_{j \in w(x_N)} j, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Таким образом, мы получили игру в нормальной форме $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N} \rangle$, которая и представляет собой модель аукциона закрытого типа на повышение первой цены.

б) **Аукцион второй цены.** В аукционе второго типа (аукцион Викри) победителем также считается участник, предложивший наибольшую цену, однако он должен уплатить вторую по величине цену. В этом случае получаем следующую игру.

Множество стратегий каждого участника также есть $X_i = X = [c, +\infty)$. Пусть в ходе аукциона реализовалась ситуация $x_N = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Введем обозначение $x_{-i}^{+} = \max\limits_{j \neq i} x_j$. Тогда функция выигрыша участника может быть записана в виде

$$K_i(x_N) = \begin{cases} v_i - x_{-i}^{+}, & i = \min\limits_{j \in w(x_N)} j, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Снова получена игра в нормальной форме, но это уже иная игра, отличающаяся от предыдущей функциями выигрыша игроков.

Предположим, что нам удалось построить математическую модель конфликта — игру Г. Иначе говоря, математически описано множество стратегий игроков и аналитически выражены их предпочтения в форме функций выигрыша. Теперь желательно дать рекомендации конфликтующим сторонам (игрокам) как играть в такую игру. Считая игроков рациональными (к сожалению, в реальной жизни это далеко не всегда имеет место), предположим, что каждый из них намерен действовать наилучшим для себя образом, т. е. «оптимально».

§ 1.2. Классификация игр

Вопрос о классификации игр актуален в первую очередь потому, что каждый класс игр, вообще говоря, использует свой математический аппарат (может быть, в этом и кроется основная сложность изучения теории игр в целом).

На первом уровне классификации игры делятся на *статические* и *динамические*. Далее каждый класс можно разделить на *бескоалиционные* и *кооперативные* игры, а в зависимости от знания игроками самой игры (1.1) — на *игры с полной* и *неполной информацией* соответственно. При этом игра Г называется игрой с полной информацией, если каждый элемент в представлении (1.1) общеизвестен всем игрокам. В противном случае игра Г называется игрой с неполной информацией.

Из класса бескоалиционных игр можно выделить *игры с постоянной* суммой. В случае игры с постоянной суммой для каждой ситуации x_N выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(x_N) = \text{const}. \tag{1.3}$$

Особенность игр с постоянной суммой заключается в том, что при любом исходе игры суммарный выигрыш всех игроков один и тот же. Если эта величина равна 0, то говорят об играх с нулевой суммой.

Специально выделяют класс наиболее изученных *игр двух лиц*. Заметим, что любая игра Γ двух лиц определяется заданием следующих объектов:

$$\Gamma = \langle X, Y, K_1, K_2 \rangle ., \tag{1.4}$$

где X — множество стратегий игрока 1, Y — множество стратегий игрока 2, $K_i(x, y), x \in X, y \in Y$ — функция выигрыша игрока $i, i = 1, 2$.

Пример 1.2.1. (*Модель дуополии по Курно.*) Предположим, что две фирмы F_i, $i = 1, 2$, производят однородный продукт и конкурируют на одном и том же рынке. Пусть функция затрат фирмы F_i известна обоим участникам и имеет вид: $C_i(q_i)$, где $q_i \geq 0$ — объем выпуска товара данной фирмой.

Пусть при этом рынок характеризуется *функцией спроса* $q = D(p), p \geq 0$, которая является убывающей функцией цены. Будем предполагать, что для функции спроса существует обратная функция: $p = D^{-1}(q) \equiv P(q), q \geq 0, q = q_1 + q_2$, которую здесь мы будем называть *функцией цены.*

Будем предполагать, что объемы выпуска (в данном примере объем выпуска это и это есть стратегия игрока) $q_i \geq 0$ обе фирмы выбирают одновременно и независимо друг от друга, причем таким образом, чтобы максимизировать прибыль от реализации своей продукции. В таком случае функция прибыли фирмы i может быть записана в виде

$$\Pi_i(q_i, q_j) = q_i P(q_i + q_j) - C_i(q_i).$$

И игра двух лиц вида $\Gamma^C = \langle Q, Q, \Pi_1, \Pi_2 \rangle$, где $Q = \{q \,|q \geq 0\}$, называется *дуополией по Курно.*

Пример 1.2.2. (*Дуополия по Бертрану*). Рассмотрим задачу, аналогичную предыдущей, когда две фирмы производят однородный продукт. Однако теперь будем предполагать, что стратегией игрока (фирмы) является цена $p_i \geq 0$, которую назначает фирма F_i за единицу своей продукции. Будем предполагать, что цены (цена в этом примере является стратегией игрока) назначаются одновременно и независимо друг от друга, при этом удельные производственные затраты постоянны и равны $c_i \geq 0$ (другие затраты не учитываются).

Определим спрос, с которым сталкивается фирма в условиях ценовой конкуренции, следующим образом:

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} D(p_i), \text{ если } p_i < p_j, \\ D(p_i)/2, \text{ если } p_i = p_j, \\ 0, \text{ если } p_i > p_j. \end{cases}$$

Тогда функция прибыли фирмы F_i, будет иметь вид

$$\Pi_i = (p_i - c_i)D_i(p_i, p_j).$$

Итак, построена игра двух лиц $\Gamma^B = \langle P, P, \Pi_1, \Pi_2 \rangle$, где $P = \{p\,|p \geq 0\}$. Эта игра называется *дуополией по Бертрану.*

Игры двух лиц с нулевой суммой называются *антагонистическими.* Особенность антагонистической игры заключается в том, что в любой ситуации выигрыш каждого игрока равен проигрышу другого. Поэтому антагонистическая игра Γ_1 определяется заданием следующих объектов:

$$\Gamma_1 = \langle X, Y, K \rangle \,, \tag{1.5}$$

где X — множество стратегий игрока 1, Y — множество стратегий игрока 2, $K(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ — функция выигрыша (функция проигрыша) игрока 1 (2) соответственно.

В зависимости от структуры множества стратегий игроков игры можно разделить на *конечные* (с конечным числом стратегий у каждого игрока) и *бесконечные игры.*

Наиболее изучены классы конечных игр двух лиц, которые называются *биматричными* (если игра неантагонистическая) и *матричными* (если игра антагонистическая) соответственно.

Биматричная $m \times n$ игра $\Gamma(A, B)$ определяется заданием пары матриц $(A, B) = \{(a_{ij}, b_{ij})\}$ порядка $m \times n$, т.е. матрицы указанного порядка, элементами которой являются пары выигрышей (a_{ij}, b_{ij}), где a_{ij} — выигрыш первого игрока, и b_{ij} — выигрыш второго, а стратегиями номера строк i и столбцов j для игроков 1 и 2 соответственно.

Матричная $m \times n$ игра $\Gamma(A)$ определяется заданием матрицы $A = \{a_{ij}\}$ порядка $m \times n$, элементами которой являются выигрыши (проигрыши) a_{ij} первого (второго) игрока, а стратегиями — номера строк i и столбцов j для игроков 1 и 2 соответственно, т. е. $\Gamma(A)$ есть по существу биматричная игра $\Gamma(A, -A)$.

Биматричная игра $\Gamma(A, B)$ (матричная игра $\Gamma(A)$) реализуется следующим образом. Игроки одновременно и независимо друг от друга (не имея информации о действиях другого игрока) выбирают свои стратегии $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ из конечных множеств (выбирают номера строки и столбца матрицы соответственно). После осуществления своего выбора они одновременно объявляют свои стратегии. В результате формируется пара стратегий (i, j) (ситуация в игре). После этого игра прекращается и игрок 1 получает выигрыш в размере a_{ij}, а игрок 2 — выигрыш в размере b_{ij}, если игра биматричная, или $(-a_{ij})$, если игра матричная.

Среди бесконечных игр наиболее изучены *непрерывные* (игры с непрерывными функциями выигрыша и компактными множествами стратегий). Среди непрерывных игр выделяют подкласс *вогнутых игр*, когда функция выигрыша каждого игрока вогнута относительно стратегии этого игрока.

§ 1.3. Стратегии и некооперативное поведение

В теории игр различают *некооперативное* и *кооперативное поведение.* В случае некооперативного поведения основной акцент делается на тех стратегиях, которые игроки выбирают в предположении рациональности такого выбора. Для игр в нормальной форме мы будем различать стратегии двух типов: *чистые* и *смешанные стратегии.*

Рассмотрим бескоалиционную игру $\Gamma = \left\langle N, \{X_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}\right\rangle$. Под *чистой стратегией* игрока i будем понимать, как и ранее, произвольный элемент $x_i \in X_i$. *Смешанная стратегия* игрока i — это некоторое распределение вероятностей на множестве чистых стратегий X_i данного игрока.

Предположим для простоты, что игра Γ — конечная и m_i — число чистых стратегий игрока i. Обозначим через μ_i произвольную смешанную стратегию игрока i, т. е. некоторое распределение вероятностей на множестве чистых стратегий X_i. Через $\mu_i(x_i)$ обозначим вероятность, которую стратегия μ_i приписывает конкретной чистой стратегии $x_i \in X_i$. Множество всех смешанных стратегий игрока i обозначим через $\bar{X}_i$.

Пусть каждый игрок i применяет свою смешанную стратегию μ_i. Тогда, поскольку выборы игроков осуществляются одновременно и независимо друг от друга, вероятность появления ситуации $x_N = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ равна произведению вероятностей выборов составляющих ее стратегий, т. е.

$$\mu(x_N) = \mu_1(x_1) \times \cdots \times \mu_n(x_n). \tag{1.6}$$

Формула (1.6) задает распределение вероятностей на множестве всех ситуаций $X_N = \prod_{i\in N} X_i$, определяемое стратегиями $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Набор смешанных стратегий $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ называется *ситуацией в смешанных стратегиях.* Ситуация в смешанных стратегиях μ реализует различные ситуации в чистых стратегиях с некоторыми вероятностями, поэтому выигрыш каждого из игроков является случайной величиной. В качестве значения функции выигрыша игрока i в ситуации μ принимается математическое ожидание этой случайной величины:

$$\bar{K}_i(\mu) = \sum_{x\in X} K_i(x_N)\mu(x_N) =$$

$$= \sum_{x_1 \in X_1} \cdots \sum_{x_n \in X_n} K_i(x_1, \ldots, x_n) \times \mu_1(x_1) \times \cdots \times \mu_n(x_n).$$

Таким образом, построена игра $\bar{\Gamma} = \left\langle N, \left\{\bar{X}_i\right\}_{i \in N}, \left\{\bar{K}_i\right\}_{i \in N} \right\rangle$, которая называется *смешанным расширением игры* Γ.

Игра $\bar{\Gamma}$ реализуется следующим образом. Каждый игрок i независимо от остальных участников выбирает смешанную стратегию $\mu_i \in \bar{X}_i$ и реализует случайный механизм в соответствии с распределением μ_i. Одновременно объявляя результаты реализации смешанных стратегий, получаем ситуацию $x_N = (x_1, \ldots, x_n)$, в которой игрок i получает выигрыш, равный $K_i(x_N) = K_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. На этом игра заканчивается.

Для биматричной (матричной) игры $\Gamma(A, B)$ ($\Gamma(A)$) смешанные стратегии игроков определяются следующим образом. Для игрока 1 (2) множество смешанных стратегий $X(Y)$ имеет вид:

$$X = \{x | x = (\xi_1, \ldots, \xi_m), \xi_i \geq 0, \sum_i \xi_i = 1\},$$

$$Y = \{y | y = (\eta_1, \ldots, \eta_n), \eta_j \geq 0, \sum_j \eta_j = 1\}. \tag{1.7}$$

Функции выигрыша игроков 1 и 2 в смешанных стратегиях в биматричной игре $\Gamma(A, B)$ равны:

$$K_1(x, y) = xAy = \sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \eta_j,$$

$$K_2(x, y) = xBy = \sum_{i,j} b_{ij} \xi_i \eta_j. \tag{1.8}$$

Функции выигрыша игроков 1 и 2 в смешанных стратегиях в матричной игре $\Gamma(A)$ равны:

$$K_1(x, y) = K(x, y) = xAy = \sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \eta_j,$$

$$K_2(x, y) = -K(x, y) = x(-A)y = \sum_{i,j} (-a_{ij}) \xi_i \eta_j. \tag{1.9}$$

Таким образом, смешанные расширения указанных биматричной и матричной игр являются играми двух лиц и антагонистической игрой и имеют соответственно вид:

$$\bar{\Gamma}(A, B) = \langle X, Y, K_1, K_2 \rangle,$$

$$\bar{\Gamma}(A) = \langle X, Y, K \rangle. \tag{1.10}$$

§ 1.4. Коалиции и кооперативное поведение

При исследовании *кооперативного поведения* основной акцент делается на тех типах коалиций (т.е. групп игроков), которые могут образоваться в игре. Естественно, возникает вопрос: когда игроки имеют мотив объединиться в ту или иную коалицию? Этот мотив связан

- либо с выгодностью совместного выбора стратегий,
- либо с возможностью перераспределения совместного общего выигрыша от кооперации,
- либо и с тем, и с другим.

Для того, чтобы перераспределение выигрыша было возможным, необходимо, чтобы функции выигрыша у игроков обладали свойством *линейной трансферабельности.*

Рассмотрим бескоалиционную игру $\Gamma = \left\langle N, \{X_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}\right\rangle$. Произвольное подмножество $S \subset N$ будем называть *коалицией* в игре. Дополнение этого множества до множества всех игроков, т. е. коалицию $T = N\backslash S$, будем называть *дополнительной коалицией* для коалиции S. В дальнейшем дополнительную коалицию T для коалиции S будем обозначать следующим образом: $T \equiv -S$. Понятно, что каждый игрок $i \in N$ является коалицией (*одноэлементной*). Пустое множество и все множество игроков N также являются коалициями (*минимальная и максимальная коалиции* соответственно).

Определим теперь понятие стратегии для коалиции. Под *стратегией x_S коалиции* S будем понимать набор стратегий, выбранных всеми игроками, входящими в коалицию S, т. е. $x_S = (x_i)_{i\in S}$. Множество всех стратегий коалиции S обозначим через X_S. Понятно, что

$$x_S \in X_S = \prod_{i\in S} X_i. \tag{1.11}$$

В такой терминологии ситуация $x_N = (x_1, \ldots, x_n) \in X_N$ может интерпретироваться как стратегия максимальной коалиции N. При этом в дальнейшем будем использовать следующее удобное представление, справедливое для любой ситуации $x_N = (x_1, \ldots, x_n)$ и любой коалиции S:

$$x_N = (x_S, x_{-S}), x_S \in X_S, x_{-S} \in X_{-S}, \tag{1.12}$$

где x_S, x_{-S} — наборы стратегий игроков, входящих в основную коалицию S и дополнительную коалицию $-S$ и соответствующих ситуации $x_N = (x_1, \ldots, x_n)$.

Понятно, что данное представление ситуации $x_N = (x_1, \dots, x_n)$ может быть распространено на любое коалиционное разбиение $\{S_j\}_{j=1}^J$ множества всех игроков N, т. е.

$$x_N = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = (x_{S_1}, \dots, x_{S_j}, \dots, x_{S_J}), \tag{1.13}$$

где $x_{S_j} \in X_{S_j}, \bigcup\limits_j S_j = N, S_i \bigcap S_j = \emptyset$.

Зафиксируем коалицию $S \subset N$. Под *функцией выигрыша коалиции* будем понимать функцию, заданную на всех ситуациях $x_N \in X_N$ следующего вида

$$K_S(x_N) = K_S(x_S, x_{-S}) \equiv \sum_{i \in S} K_i(x_S, x_{-S}). \tag{1.14}$$

Таким образом, с каждой игрой $\Gamma = \left\langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N} \right\rangle$ связано семейство игр двух лиц $\{\Gamma(S, -S)\}_{S \subset N}$, где $\Gamma(S, -S)$ — игра двух лиц, определяемая следующим образом:

$$\Gamma_2(S, -S) \equiv \langle X_S, X_{-S}, K_S, K_{-S} \rangle. \tag{1.15}$$

Операцию замены исходной игры Γ семейством игр $\{\Gamma(S, -S)\}_{S \subset N}$, будем называть *декомпозицией игры по коалициям* S.

Можно производить *декомпозицию игры по коалиционному разбиению* $\{S_j\}_{j=1}^J$. С этой целью достаточно ввести семейство игр $\Gamma_J(\{S_j\}_{j=1}^J)$, $\bigcup\limits_j S_j = N, S_i \cap S_j = \emptyset$, где

$$\Gamma_J(\{S_j\}_{j=1}^J) \equiv \left\langle \{1, \dots, J\}, \left\{X_{S_j}\right\}_{j=1}^J, \left\{K_{S_j}\right\}_{j=1}^J \right\rangle. \tag{1.16}$$

§ 1.5. Равновесие по Нэшу

Что же означает фраза «действовать в игре оптимально»? Поначалу этот вопрос кажется чрезвычайно простым. Поскольку каждый из игроков заинтересован в получении максимально возможного значения своей функции выигрыша, первое, что приходит на ум — это рекомендовать игрокам такие стратегии, которые максимизировали бы их функции выигрыша. К сожалению, реальность такова (это видно из внимательного рассмотрения игры в нормальной форме Γ (1.1)), что чаще всего ни один из игроков не в состоянии выбором своей стратегии гарантировать максимально возможное значение своего выигрыша по той простой причине, что его выигрыш существенно зависит от того, что будут делать другие игроки (иначе говоря, зависит от выбранных стратегий остальных игроков). Именно в этом заключается, возможно, наиболее важная и сложная проблема теории игр, — выяснить, что понимать под оптимальным поведением в игре или под *решением игры.*

Определение 1.5.1. *Под принципом оптимальности (или решением)* s, *заданным на классе (подклассе) игр* $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i=1}^n, \{K_i\}_{i=1}^n \rangle$ *в нормальной форме понимают функцию, ставящую в соответствие каждой игре* Γ *этого класса определенное подмножество* $s(\Gamma)$ *из множества* X_N *всех ситуаций в игре, т. е.* $s(\Gamma) \subset X_N$.

Наиболее распространенным принципом оптимального поведения или принципом оптимальности считается выбор в качестве наилучшей некоторой ситуации равновесия, которая названа в честь Джона Нэша, сформулировавшего указанный принцип оптимальности в 1951 году. Этот принцип определяет в качестве оптимальных такие ситуации, для которых любые индивидуальные отклонения игроков от входящих в эту ситуацию стратегий, не могут увеличить выигрыша отклонившегося игрока при условии, что все остальные игроки придерживаются зафиксированных в этой ситуации стратегий. Математически это условие выражается следующим образом.

Определение 1.5.2. *Ситуация*

$$x_N^* = (x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \in X_N$$

в игре Γ_N *называется равновесием по Нэшу, если для каждого игрока* i *и любой стратегии* $x_i \in X_i$ *этого игрока выполняется неравенство*

$$K_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \geq K_i(x_1^*, \dots x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*). \quad (1.17)$$

Заметим, что в обозначениях (1.14) условие (1.17) принимает следующий вид

$$K_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq K_i(x_i, x_{-i}^*).$$

Множество всех ситуаций равновесия по Нэшу в игре Γ будем обозначать $NE(\Gamma)$. В соответствии с определением 1.5.2, множество $NE(\Gamma)$ реализует определенный принцип оптимальности (а именно, *принцип равновесия по Нэшу*) для игры в нормальной форме.

§ 1.6. Решение, оптимальное по Парето

Другой принцип оптимальности основан на понятии парето-оптимального решения.

Определение 1.6.1. *Ситуация* $\bar{x}_N \in X_N$ *в игре* Γ *называется парето-оптимальной (оптимальной по Парето), если не существует другой ситуации* $x_N \in X_N$*, когда неравенство*

$$K_i(x_N) \geq K_i(\bar{x}_N) \tag{1.18}$$

справедливо для каждого игрока $i \in N$ *и хотя бы для одного игрока* $i_0 \in N$ *оно выполняется как строгое, т. е.*

$$K_{i_0}(x_N) > K_{i_0}(\bar{x}_N). \tag{1.19}$$

Множество всех парето-оптимальных решений игры Γ будем обозначать $PO(\Gamma)$ (построение множества $PO(\Gamma)$ реализует *принцип оптимальности по Парето*).

Если условия (1.18)–(1.19) выполнены, то говорят, что *ситуация* $x_N \in X_N$ *доминирует ситуацию* $\bar{x}_N \in X_N$ *по Парето*. Тем самым, $PO(\Gamma)$ — это множество ситуаций, которые *не доминируемы по Парето* в игре Γ. Другими словами, парето-оптимальной является такая ситуация, когда состояние ни одного из игроков не может быть улучшено без ухудшения состояния какого-то, по крайней мере одного другого игрока. В этом состоит *коллективная рациональность* парето-оптимального решения.

Заметим, что принцип оптимальности по Парето, вообще говоря, нельзя рассматривать как принцип некооперативного поведения, поскольку его реализация связана с совместным выбором стратегий всеми игроками. Однако сейчас он нас интересует в большей степени как желательное свойство «оптимального» решения, поскольку принцип оптимальности по Парето выражает свойство коллективной рациональности принимаемого решения.

Приведем несколько поучительных примеров нахождения равновесий по Нэшу и парето-оптимальных решений для простейших биматричных 2×2 игр.

Пример 1.6.1. Рассмотрим биматричную игру $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ с матрицей

$$(A, B) = \begin{bmatrix} (5,5) & (10,1) \\ (1,10) & (2,2) \end{bmatrix}.$$

Так как $5 \geq 1$, то ситуация $(1,\ 1)$ является равновесием по Нэшу, т. е. $(1,1) \in NE(\Gamma)$. Нетрудно проверить, что это единственное равновесие по Нэшу в данной игре, причем его выбор приводит к выигрышам (5, 5). Проверка всех четырех возможных ситуаций показывает, что множество оптимальных по Парето решений в данной задаче состоит из трех ситуаций и имеет вид: $PO(\Gamma_N) = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$. Таким образом, ситуация (1, 1) является равновесной по Нэшу и одновременно оптимальной по Парето (это, так называемое, *сильное равновесие*), поэтому именно его в данном случае можно предложить в качестве нормативного решения конфликта, моделируемого данной игрой.

Пример 1.6.2. («*Семейный спор*»). Рассмотрим игру $\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B})$ с матрицей

$$(A,B) = \begin{bmatrix} (4,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,4) \end{bmatrix}.$$

Интересна экономическая интерпретация игры. Представьте себе, что у двух игроков имеется два симметричных варианта кооперации, соответствующих выбору обоими игроками одинаковых стратегий. Однако один вариант кооперации выгоден одному игроку, а другой — другому игроку. Если же они выбирают различные стратегии, то кооперация не состоится, и оба игрока имеют нулевой выигрыш.

Нетрудно найти, что в этой игре $NE(\Gamma) = PO(\Gamma_2) = \{(1,1),\ (2,2)\}$. Таким образом, здесь имеются два равновесия по Нэшу, неравнозначных с точки зрения игроков. По этой причине возникает проблема выбора: какое именно равновесие из двух указанных выберут игроки? Ясно, что первому игроку более желательно первое равновесие, а второму — второе. Тем самым, в процессе игры может возникнуть борьба за лидерство, когда каждый из игроков стремится первым назвать свою стратегию, чтобы навязать партнеру «свое равновесие».

Пример 1.6.3. («*Дилемма заключенного*»). Рассмотрим биматричную игру $\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B})$ с матрицей

$$(A,B) = \begin{bmatrix} (5,5) & (1,10) \\ (10,1) & (2,2) \end{bmatrix}.$$

Название игры происходит от следующей ее первоначальной интерпретации. Два участника преступной группы (игроки) ограбили банк, однако были задержаны полицией за незначительное нарушение (например, за хулиганские действия). Полиция подозревает, что они участвовали в ограблении банка, но у нее нет прямых улик. Для прояснения вопроса подозреваемых посадили в одиночные камеры, лишив возможности обмениваться информацией и принимать согласованные решения. У каждого игрока имеется две стратегии: 1-я — не сознаваться в ограблении и 2-я — сознаться в ограблении.

Здесь также интересна экономическая интерпретация данной игры, которая вызывает повышенный интерес к данному конфликту на протяжении последних десятилетий. У каждого игрока имеется две стратегии:

1-я — кооперироваться и 2-я — не кооперироваться (конкурировать). Если оба игрока придерживаются стратегии кооперироваться, то они получают выигрыши (5, 5). Если оба игрока придерживаются стратегии конкурировать, то они получают выигрыши (2, 2). Оказывается, однако, что выгодно конкурировать, если другой игрок придерживается стратегии кооперации (см. матрицу игры).

Заметим, что данная игра, на первый взгляд, незначительно отличается от игры из примера 1.6.1. Однако она моделирует абсолютно иной конфликт. В данной игре имеется единственное равновесие по Нэшу: $(2,2) \in NE(\Gamma)$, причем это равновесие не является оптимальным по Парето. Множество оптимальных по Парето ситуаций в данной игре такое же, как и в примере 1.6.1: $PO(\Gamma) = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$. Главная особенность и трудность выбора окончательного решения здесь состоит в том, что равновесие по Нэшу доминируется по Парето ситуацией (1, 1). Другими словами, в данной игре налицо противоречие между индивидуально и коллективно рациональным поведениями игроков. Действительно, используя приведенную выше экономическую интерпретацию игры, получаем, что кооперироваться выгодно обоим игрокам, однако такое поведение не является устойчивым в плане индивидуального отклонения игроков (не является равновесием по Нэшу). Если оба игрока будут конкурировать, то получаем равновесие по Нэшу, но такое поведение невыгодно обоим игрокам.

Пример 1.6.4. («*Услуга за услугу*»). Рассмотрим игру $\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B})$ с матрицей

$$(A,B) = \begin{bmatrix} (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) \end{bmatrix}.$$

Интерпретация игры состоит в следующем. Выбор первой строки (столбца) соответствует «благожелательному» поведению по отношению к партнеру, а выбор второй строки (столбца) — «агрессивному» поведению. Если оба игрока придерживаются «благожелательного» поведения, то они оказывают друг другу услугу и получают выигрыши (1, 1). Если оба игрока придерживаются «агрессивного» поведения, то они получают выигрыши (0, 0). В случае, когда игроки придерживаются различных типов поведения, то выбравший «агрессивное» поведение игрок получает выигрыш 1, а другой игрок — выигрыш 0.

Парадоксальность конфликта заключается в том, что все ситуации в игре являются равновесными по Нэшу, т. е. $NE(\Gamma) = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\} = X_N$. При этом только одна ситуация (1, 1) является оптимальной по Парето, т. е. $PO(\Gamma) = \{(1,1)\}$. Поэтому можно считать, что здесь нет проблемы выбора. Именно ситуацию (1, 1) можно рекомендовать в качестве нормативного решения конфликта, моделируемого данной игрой.

Пример 1.6.5. Рассмотрим биматричную игру $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ с матрицей

$$(A, B) = \begin{bmatrix} (2,0) & (1,1) \\ (1,1) & (2,0) \end{bmatrix}.$$

Непосредственной проверкой определения 1.5.2 для каждой из четырех имеющихся ситуаций в данной игре получаем, что здесь нет равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, т. е. $NE(\Gamma) = \emptyset$. С другой стороны, множество оптимальных по Парето ситуаций совпадает с множеством всех ситуаций в игре: $PO(\Gamma) = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\} = X_N$. Последнее обстоятельство не является случайным, поскольку, как нетрудно заметить, данная игра — это игра с постоянной суммой. Отсутствие равновесия по Нэшу делает невозможной проблему выбора конкретного решения в чистых стратегиях. Следует, однако, заметить, что если перейти от чистых стратегий к смешанным стратегиям, то указанная проблема может быть успешно решена в терминах равновесия по Нэшу в смешанном расширении игры.

Выделение определенных ситуаций равновесия в качестве претендента на оптимальное поведение достаточно естественно. Однако при ближайшем рассмотрении оказывается, что принцип равновесия по Нэшу (как принцип оптимальности) обладает рядом свойств, затрудняющим его практическое применение.

- Входящие в ситуацию равновесия стратегии *нельзя считать оптимальными*, поскольку ни один из игроков, использующих их в индивидуальном порядке, не может гарантировать себе выигрыша в равновесной ситуации. Поэтому для реализации ситуации равновесия необходимо некоторое дополнительное соглашение между игроками о том, что они *все* предполагают придерживаться именно данного равновесия. Из вышесказанного получаем, что можно говорить лишь об оптимальности ситуации равновесия *в целом* (т. е. для всех игроков). Это, в свою очередь, требует, чтобы в игре существовала, пусть даже незначительная кооперация (хотя бы на уровне возможности обмена информацией о выбираемых стратегиях).

- Также следует отметить (в общем случае) *не единственность* равновесия (при этом в различных равновесных ситуациях игроки, как правило, получают различные по величине выигрыши). Другими словами, может получиться так, что одна равновесная ситуация предпочтительна одним игроком, а другая — другим (распространенный в литературе пример на эту тему — игра «семейный спор»).

- Далее может оказаться, что какая-то группа (коалиция) игроков *при отклонении от ситуации равновесия увеличивает свой выигрыш* (распространенный в литературе пример — игра «дилемма заключенного»).

- В случае, когда принцип оптимальности в игре зафиксирован, т. е. определено, что понимается под оптимальным поведением, необходимо убедиться, что такое поведение возможно. В частности, если в качестве принципа оптимальности выбрано равновесие по Нэшу, надо убедиться, что такая ситуация в рассматриваемой игре действительно существует. В общем случае *существование равновесия в чистых стратегиях — достаточно редкое событие*, однако известны достаточно широкие классы игр, для которых эта проблема решается положительно.

Замечание 1.6.1. Особенно удачным является положение, когда равновесная по Нэшу ситуация является также оптимальной по Парето. В таком случае решение удовлетворяет одновременно двум принципам оптимальности. К сожалению, такое положение дел достаточно редко встречается в статических играх, но может быть реализовано при определенной модификации задачи в динамических играх.

Отмеченные проблемы, связанные с ситуациями равновесия, являются достаточно глубокими и лежат в самом существе конфликтного взаимодействия многих участников (игроков), и поэтому не должны рассматриваться в качестве негативной аргументации. В то же время, для приложений наибольший интерес представляют те модели, в которых эти проблемы могут быть решены хотя бы частично.

Как мы уже отмечали, один из крайне важных вопросов — это существование равновесия по Нэшу. На этот вопрос отвечают утверждения следующих теорем. Заметим, что под *равновесием по Нэшу в смешанных стратегиях* в игре Γ мы понимаем равновесие по Нэшу в ее смешанном расширении $\overline{\Gamma}$ (см. параграф 1.3).

Теорема 1.6.1. *В каждой конечной игре Γ в нормальной форме существует по крайней мере одна ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.*

Доказательство для случая биматричных игр см., например, в [Петросян, Зенкевич, Семина, 1998].

Теорема 1.6.2. *В каждой непрерывной игре Γ_N с компактными множествами стратегий игроков существует, по крайней мере, одна ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.*

В формулировке следующей теоремы используется понятие функции, которое обобщает понятие вогнутой функции. Функцию f, заданную на выпуклом множестве X, $X \subset R^n$, называют *квазивогнутой* на множестве X, если для любых $x, x' \in X$ и всех чисел $\lambda \in [0, 1]$ имеет место неравенство

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x') \geq \min\{f(x); f(x')\}.$$

Можно проверить, что всякая вогнутая функция является квазивогнутой, но не наоборот.

Теорема 1.6.3. *Если в непрерывной игре Γ множества стратегий всех игроков непустые, выпуклые и компактные, а функция выигрыша каждого игрока квазивогнута (в частности, вогнута) на множестве стратегий этого игрока, то в игре существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.*

Приведенные результаты не являются независимыми. Наиболее общий из них сформулирован в теореме 1.6.3 (см. [Debreu, 1952; Glicksberg, 1952; Fan Ky, 1952]). Сами утверждения вышеприведенных теорем указывают те основные классы игр, в которых рассмотрение равновесия по Нэшу содержательно оправдано.

Если из тех или иных соображений стало известно, что равновесие в данной игре существует, то сразу возникает другой, крайне важный с точки зрения практики, вопрос: как находить существующие равновесия?

§ 1.7. Множество наилучших ответов. Функция реакции

Из определения 1.5.2 следует, что если стратегия игрока входит в ситуацию равновесия, то на ней достигает максимума его функция выигрыша, при условии, что остальные игроки придерживаются стратегий, входящих в ситуацию равновесия. Остановимся на этом свойстве подробнее.

Рассмотрим игру $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i=1}^n, \{K_i\}_{i=1}^n \rangle$ в нормальной форме. Обозначим через $BR_i(x_{-i})$ — *множество наилучших ответов игрока i* на поведение дополнительной коалиции $x_{-i} \in X_{-i}$:

$$BR_i(x_{-i}) = \left\{ x_i \,\middle|\, K_i(x_i, x_{-i}) = \max_{y_i} K_i(y_i, x_{-i}) \right\} \equiv$$

$$\equiv \arg\max_{y_i} K_i(y_i, x_{-i}). \qquad (1.20)$$

Множество наилучших ответов игрока содержит все стратегии этого игрока, на которых достигается максимум его функции выигрыша, при условии, что ему известна стратегия дополнительной коалиции.

Непосредственно из определения 1.5.2 следует следующая теорема.

Теорема 1.7.1. *Ситуация $x_N^* \in X_N$ образует ситуацию равновесия в игре $\Gamma_N = \langle N, \{X_i\}_{i=1}^n, \{K_i\}_{i=1}^n \rangle$ тогда и только тогда, когда включение $x_i^* \in BR_i(x_{-i}^*)$ имеет место для каждого игрока i.*

Данный результат может быть использован для нахождения равновесия по Нэшу, по крайней мере, в классе конечных игр, при условии, что само равновесие существует.

Пример 1.7.1. («*Игра голосование*»). Три выборщика (игроки 1, 2, 3 соответственно) должны выбрать одного кандидата (стратегии a, b, c соответственно). Каждый выборщик может и должен голосовать только за одного кандидата из числа названных представителей. В результате голосования проходит тот кандидат, за которого проголосовало большинство выборщиков. Обозначим через $u_i(a)$ полезность i от того, что в результате голосования прошел кандидат a. Полезности прохождения кандидатов для игроков равны:

$$\begin{aligned}
u_1(a) = u_2(b) = u_3(c) = 3,\\
u_1(b) = u_2(c) = u_3(a) = 2,\\
u_1(c) = u_2(a) = u_3(b) = 1.
\end{aligned}$$

Если ни один из кандидатов не набрал большинства голосов, то не проходит ни один из заявленных кандидатов, и полезности всех игроков в этом случае равны 0.

Найдем равновесия по Нэшу. Пусть игрок 1 голосует за a. Если игрок 3 голосует за a, то игрок 2 не изменит исход, как бы он не голосовал. Поэтому его наилучшим ответом будет любая стратегия. Если игрок 2 голосует за a или b, то наилучшим ответом игрока 3 будет a. Если же игрок 2 голосует a или b, а игрок 3 — голосует a, то наилучший ответ игрока 1, очевидно, — голосовать a. Таким образом, ситуации (a, a, a) и (a, b, a) являются ситуациями равновесия по Нэшу. В качестве упражнения, найдите множество всех ситуаций равновесия по Нэшу в этой игре.

Пример 1.7.2. («*Парадокс Бертрана*»). Рассмотрим модель дуополии по Бертрану, сформулированную в примере 1.2.2 Предположим, что предельные затраты у обеих фирм одинаковы, т. е. $c_i = c$. Тогда единственное равновесие по Нэшу имеет вид: $(c, c) \in NE(\Gamma_2^B)$. Покажем, что (c, c) — это равновесие по Нэшу в дуополии Бертрана. Очевидно, что $c \in BR_i(c)$. Действительно, если игроки выбирают (c, c), то обе фирмы получают нулевую прибыль. Если фирма выбирает $p_i > c$, то она имеет нулевой спрос и ее прибыль равна нулю. Если же она выбирает $p_i < c$, то получает весь рыночный спрос, однако прибыль фирмы отрицательна, поскольку цена продажи ниже предельных затрат. Что касается проверки единственности равновесия, то для ее осуществления необходимо рассмотреть все другие возможные варианты и показать, что они не являются равновесиями по Нэшу. Что и требовалось доказать.

Равновесие по Нэшу в модели Бертрана в экономической литературе называется *равновесием Бертрана.* Парадокс этой модели (*парадокс Бертрана*) заключается в том, что в отрасли с высоким уровнем концентрации (дуополия) фирмы в ситуации равновесия работают с нулевой прибылью (равновесные цены равны предельным затратам). Известно, что именно такие цены назначают фирмы в ситуации равновесия, но в условиях совершенной конкуренции (это утверждение теоремы Эрроу).

§ 1.8. Линейная модель дуополии по Курно

Нахождение ситуации равновесия по Нэшу в классе непрерывных игр представляет собой непростую вычислительную задачу. Однако если для каждого игрока i функция выигрыша $K_i(x_i, x_{-i})$ является вогнутой по переменной x_i на выпуклом компактном множестве X_i, то в непрерывной игре множество $BR_i(x_{-i})$ не пусто для всех $x_{-i} \in X_{-i}$ и $i \in N$. В силу теоремы 1.6.3 равновесие в чистых стратегиях существует. Поэтому для нахождения равновесия по Нэшу можно воспользоваться теоремой 1.7.1. Проблема нахождения равновесия по Нэшу становится технической и заключается в построении множеств $BR_i(x_{-i})$ наилучших ответов, что, однако, на практике может составить сложную вычислительную задачу.

Сделаем теперь дополнительное предположение о том, что множества $BR_i(x_{-i})$ являются одноэлементными для всех $x_{-i} \in X_{-i}$ и $i \in N$, т.е. $BR_i(x_{-i})$ содержит единственный элемент, который мы обозначим $R_i(x_{-i})$. В этом случае условие (1.20) можно переписать в виде

$$x_i = R_i(x_{-i}) \text{ при } x_{-i} \in X_{-i}, \tag{1.21}$$

где $K_i(R(x_{-i}), x_{-i}) = \max\limits_{y_i \in X_i} K_i(y_i, x_{-i})$. Тем самым, каждому $x_{-i} \in X_{-i}$ ставится в соответствие определенная стратегия x_i . Это означает, что на множестве всех возможных $x_{-i} \in X_{-i}$ задана некоторая функция. Ее называют *функцией реакции игрока i*.

Для существования функции реакции $x_i = R_i(x_{-i})$ достаточно, например, предположить, чтобы функции $K_i(x_i, x_{-i})$ были строго вогнутыми по переменной x_i на выпуклом множестве X_i для всякого игрока i. Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 1.8.1. *Если в непрерывной игре* Γ *множества стратегий* X_i *всех игроков* i *непустые, выпуклые и компактные, а функция выигрыша* $K_i(x_i, x_{-i})$ *каждого игрока* i *строго вогнута на множестве стратегий этого игрока, то в такой игре существуют функции реакции* $x_i = R(x_{-i})$, $x_{-i} \in X_{-i}$ *для каждого игрока* i *и равновесие по Нэшу. Ситуация* $x_N^* = (x_i^*, x_{-i}^*) \in X_N$ *образует ситуацию равновесия по Нэшу в игре* Γ *тогда и только тогда, когда* $x_i^* = R(x_{-i}^*)$ *для всех* $i \in N$.

В предположениях теоремы 1.8.1 мы получаем конструктивные условия для нахождения равновесия по Нэшу:

$$x_i^* = R(x_{-i}^*) \ \text{ для всех } \ i \in N.$$

Тем самым, проблема нахождения равновесия сводится к построению функций реакции для каждого из игроков. В условиях дифференцируемости функций выигрыша игроков решение указанной проблемы в некоторых случаях сводится к решению определенной системы уравнений.

В самом деле, обозначим частную производную функции выигрыша произвольного игрока i по переменной x_i через $K_i^i(x_i, x_{-i}) \equiv \dfrac{\partial K_i(x_i, x_{-i})}{\partial x_i}$. Аналогично, для частной производной второго порядка примем обозначение $K_i^{ii}(x_i, x_{-i}) \equiv \dfrac{\partial^2 K_i(x_i, x_{-i})}{\partial^2 x_i}$. Из курса математического анализа известно, что если функция $K_i(x_i, x_{-i})$ достигает наибольшего значения по переменной x_i во внутренней точке, то выполняется необходимое условие экстремума первого порядка:

$$K_i^i(x_i, x_{-i}) = 0 \ \text{ для всех } \ i \in N. \tag{1.22}$$

Если при этом функция $K_i(x_i, x_{-i})$ оказывается вогнутой по x_i, то условие (1.22) является и достаточным для равновесия по Нэшу.

В случае, когда функция выигрыша $K_i(x_i, x_{-i})$ дважды дифференцируема по x_i, условие вогнутости по x_i (в терминах частных производных второго порядка) примет вид:

$$K_i^{ii}(x_i, x_{-i}) \leq 0, \ \text{ для всех } x_{-i} \in X_{-i}, \ i \in N. \tag{1.23}$$

Решая уравнение (1.22), можно найти равновесие по Нэшу. Если же функция $K_i(x_i, x_{-i})$ является строго вогнутой по переменной x_i, то уравнение (1.22) неявно задает функцию реакции:

$$x_i = R_i(x_{-i}), x_{-i} \in X_{-i}.$$

Когда функция $K_i(x_i, x_{-i})$ дважды дифференцируема по x_i, условие строгой вогнутости по x_i (необходимое условие экстремума второго порядка) может быть записано в виде

$$K_i^{ii}(x_i, x_{-i}) < 0 \ \text{ для всех } \ x_{-i} \in X_{-i} \ \text{ и всех } i \in N. \tag{1.24}$$

В некоторых простых случаях указанная выше техника позволяет находить равновесие по Нэшу в непрерывной игре.

Пример 1.8.1. («*Линейная модель дуополии по Курно*».) Рассмотрим пример 1.2.1 при дополнительных линейных предположениях о функции спроса и функциях затрат. Заметим, что в экономической литературе равновесие по Нэшу в модели Курно называют *равновесием Курно*.

Предположим, что обратная функция спроса (функция цены) имеет вид $P(q) = a - q$. Пусть функции затрат также линейны по объемам выпуска, а именно: $C_i(q_i) = c_i q_i$. Тогда функции прибыли примут вид:

$$\Pi_i(q_i, q_j) = q_i(a - q_i - q_j) - c_i q_i, \quad q_i \geq 0.$$

Заметим, что функции прибыли фирмы i строго вогнуты по объемам выпуска q_i этой фирмы, поэтому условия первого порядка являются необходимыми и достаточными для равновесия по Нэшу.

Выписываем необходимое условие экстремума первого порядка для функции $\Pi_i(q_i, q_j)$:

$$q_j + 2q_i + c_i - a = 0. \tag{1.25}$$

Отсюда, в частности, получаем функции реакции конкурирующих фирм:

$$q_i = R_i(q_j) = \frac{a - q_j - c_i}{2}$$

Решая систему уравнений (1.25), получаем равновесие по Нэшу (равновесие Курно):

$$q_i^* = \frac{a - 2c_i + c_j}{3},$$

причем прибыль в равновесии при соответствующей подстановке составит величину

$$\Pi_i^* = \frac{(a - 2c_i + c_j)^2}{9} > 0.$$

Заметим, что в отличие от равновесия Бертрана в равновесии Курно каждая фирма имеет положительную прибыль. Равновесный выпуск фирмы убывает с увеличением ее предельных затрат. Любопытно, что он возрастает с увеличением предельных затрат конкурента. Это происходит от того, что более высокие затраты конкурента заставляют его снижать объем производства, что, в свою очередь, увеличивает остаточный спрос на продукцию фирмы, побуждая ее увеличивать объем производства.

§ 1.9. Недоминируемые и доминирующие стратегии

Прежде чем определить понятия, вынесенные в заголовок параграфа, введем отношения доминирования и эквивалентности на множестве стратегий фиксированного игрока.

Определение 1.9.1. *Говорят, что стратегия x_i игрока i в игре $\Gamma_N = \langle N, \{X_i\}_{i=1}^n, \{K_i\}_{i=1}^n \rangle$ доминирует стратегию y_i этого игрока, если для всех $x_{-i} \in X_{-i}$ выполнено неравенство*

$$K_i(x_i, x_{-i}) \geq K_i(y_i, x_{-i})$$

и хотя бы для одного $x_{-i} \in X_{-i}$ справедливо строгое неравенство

$$K_i(x_i, x_{-i}) > K_i(y_i, x_{-i}).$$

Отношение доминирования вводит определенное отношение порядка на множестве стратегий X_i игрока i.

Неформально перефразируя определение 1.9.1, получаем, что одна стратегия игрока доминирует другую стратегию этого же игрока, если при использовании игроком этой стратегии его выигрыш не меньше, чем при использовании другой стратегии независимо от стратегии дополнительной коалиции, при этом найдется такая стратегия дополнительной коалиции, что этот выигрыш окажется строго больше.

Определение 1.9.2. *Будем говорить, что стратегии x_i и y_i игрока i эквивалентны, если для всех $x_{-i} \in X_{-i}$ выполняется равенство*

$$K_i(x_i, x_{-i}) = K_i(y_i, x_{-i}).$$

Эквивалентность стратегий означает, что они по существу равнозначны для игрока, поскольку их использование при произвольном поведении дополнительной коалиции приводит к одинаковым выигрышам.

Введем теперь принцип оптимальности, основанный на использовании игроками *не доминируемых стратегий.*

Определение 1.9.3. *Будем говорить, что стратегия x_i игрока i в игре $\Gamma_N = \langle N, \{X_i\}_{i=1}^n, \{K_i\}_{i=1}^n \rangle$ является недоминируемой стратегией этого игрока, если не существует такой стратегии $y_i \in X_i$ игрока i, которая доминирует x_i. В противном случае стратегия x_i игрока i в игре Γ_N называется доминируемой стратегией этого игрока.*

Множество всех недоминируемых стратегий игрока i в игре Γ_N обозначим через $ND_i(\Gamma_N)$. Из общих соображений ясно, что игроку имеет прямой смысл выбирать свою стратегию именно из класса недоминируемых стратегий.

Замечание 1.9.1. Формально множество $ND_i(\Gamma_N)$ недоминируемых стратегий игрока i зависит от функции выигрыша этого игрока и множеств стратегий всех игроков. Пока мы будем использовать введенное обозначение, однако более корректным является обозначение, которое будет использовано в следующем параграфе:

$$ND_i(\Gamma_N) = ND_i(K_i, \{X_i\}_{i=1}^n).$$

Обозначим через $ND(\Gamma_N) \equiv \prod_{i \in N} ND_i(\Gamma_N)$ множество всех ситуаций, составленных из недоминируемых стратегий игроков (это, так называемые, *ситуации в недоминируемых стратегиях*). Множество $ND(\Gamma_N)$ всех *ситуаций в недоминируемых стратегиях* согласно определению 1.5.1 реализует определенный принцип оптимальности.

Нетрудно понять, что в классе конечных игр у каждого игрока существуют недоминируемые стратегии. Для непрерывных игр недоминируемые стратегии у каждого игрока существуют при стандартных предположениях.

Утверждение 1.9.1. *Пусть в непрерывной игре множество стратегий каждого игрока является компактным. Тогда у каждого игрока множество недоминируемых стратегий не пусто.*

Доказательство этого результата можно найти, например в [Мулен, 1985].

Введем теперь понятие доминирующей стратегии игрока.

Определение 1.9.4. *Стратегия x_i игрока i в игре $\Gamma_N = \langle N, \{X_i\}_{i=1}^n, \{K_i\}_{i=1}^n \rangle$ называется доминирующей стратегией этого игрока, если для всех $x_{-i} \in X_{-i}$ и для всех $y_i \in X_i$ выполняется неравенство*

$$K_i(x_i, x_{-i}) \geq K_i(y_i, x_{-i}).$$

Другими словами, доминирующая стратегия игрока — это такая стратегия, которая доминирует любую стратегию игрока или же эквивалентна ей. Обозначим множество всех доминирующих стратегий игрока i через $D_i(\Gamma_N)$.

Замечание 1.9.2. К сожалению, существование доминирующей стратегии у игрока — это довольно редкое явление в сравнении с существованием недоминируемых стратегий. Доминирующая стратегия может не существовать даже в классе конечных игр. Приведем результат, который определенным образом связывает понятия недоминируемой и доминирующей стратегий.

Теорема 1.9.1. *Предположим, что в игре* $\Gamma_N = \langle N, \{X_i\}_{i=1}^n, \ \{K_i\}_{i=1}^n \rangle$ *множество доминирующих стратегий* $D_i(\Gamma_N)$ *не пусто (т. е.* $D_i(\Gamma_N) \neq \emptyset$*). Тогда справедливы следующие уверждения:*

1. *Все стратегии в множестве* $D_i(\Gamma_N)$ *эквивалентны между собой.*
2. *Имеет место равенство множеств* $D_i(\Gamma_N) = ND_i(\Gamma_N)$.

Пусть выполнены условия теоремы, т. е. существует доминирующая стратегия x_i игрока i. Покажем, что все доминирующие стратегии эквивалентны.

Если множество $D_i(\Gamma_N)$ одноэлементное, то доказываемое утверждение является очевидным.

Пусть x_i^1 и x_i^2 — две произвольные доминирующие стратегии. Тогда для всех $x_{-i} \in X_{-i}$ выполняются неравенства

$$K_i(x_i^1, x_{-i}) \geq K_i(x_i^2, x_{-i}),$$
$$K_i(x_i^2, x_{-i}) \geq K_i(x_i^1, x_{-i}).$$

Поэтому для всех $x_{-i} \in X_{-i}$ справедливо равенство

$$K_i(x_i^1, x_{-i}) = K_i(x_i^2, x_{-i}).$$

Если $x_i \in D_i(\Gamma_N)$, то очевидно, что $x_i \in ND_i(\Gamma_N)$, т. е. имеет место включение $D_i(\Gamma_N) \subset ND_i(\Gamma_N)$. Проверим обратное включение. Если $x_i \in ND_i(\Gamma_N)$, то, рассуждая от противного, получим включение $x_i \in D_i(\Gamma_N)$, и стратегия x_i эквивалентна доминирующей стратегии (последняя существует по условию теоремы). Таким образом, справедливо равенство $D_i(\Gamma_N) = ND_i(\Gamma_N)$.

Замечание 1.9.3. Из доказательства теоремы 1.9.1 получаем, что любая стратегия, эквивалентная доминирующей, также является доминирующей стратегией этого игрока.

§ 1.10. Принцип единогласия

Обозначим через $D(\Gamma) \equiv \prod_{i \in N} D_i(\Gamma)$ *множество всех ситуаций в доминирующих стратегиях.* Множество $D(\Gamma)$ реализует принцип оптимальности, который часто называется *принципом единогласия.*

Особенность этого принципа заключается в том, что каждый игрок произвольно выбирает свою доминирующую (наилучшую) стратегию, при этом такой выбор не зависит от того, какая конкретно доминирующая стратегия выбрана (все доминирующие стратегии игрока эквивалентны). Поэтому если доминирующие стратегии у каждого игрока существуют, то трудно предположить, что они откажутся от такого выбора. Таким образом, они единогласно сыграют в ситуацию в доминирующих стратегиях. Связь между принципами единогласия и равновесия по Нэшу выражена в следующей теореме.

Теорема 1.10.1. *Для игры* $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i=1}^n, \{K_i\}_{i=1}^n \rangle$ *в нормальной форме имеет место включение*

$$D(\Gamma) \subset NE(\Gamma).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_N = (x_i, x_{-i}) \in D(\Gamma)$. Тогда для всех $i \in N$, $y_{-i} \in X_{-i}$ и всех $y_i \in X_i$ имеет место неравенство

$$K_i(x_i, y_{-i}) \geq K_i(y_i, y_{-i}).$$

Это неравенство справедливо и для стратегии дополнительной коалиции $y_{-i} = x_{-i} \in X_{-i}$. Полученное означает, что x_N — равновесие по Нэшу.

Пример 1.10.1. Рассмотрим биматричную игру $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ из примера 1.6.1. с матрицей

$$(A, B) = \begin{bmatrix} (5,5) & (10,1) \\ (1,10) & (2,2) \end{bmatrix}.$$

Здесь у игрока 1 (игрока 2) выбор строки (столбца) 1 является доминирующей стратегией, поэтому ситуация $(1,1) \in NE(\Gamma)$ является единственной ситуацией в доминирующих стратегиях, т. е. $ND(\Gamma) = D(\Gamma) = NE(\Gamma) \subset PO(\Gamma)$.

Пример 1.10.2. («*Семейный спор*»). Рассмотрим игру $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ с матрицей из примера 1.6.2.

$$(A, B) = \begin{bmatrix} (4,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,4) \end{bmatrix}.$$

В этой игре у каждого игрока обе стратегии являются недоминируемыми. Доминирующих стратегий ни у одного игрока не существует, хотя в наличии два оптимальных по Парето равновесия по Нэшу. Таким образом, в данной игре имеют место следующие соотношения: $D(\Gamma) = \emptyset$, $ND(\Gamma) \supset NE(\Gamma) = PO(\Gamma)$.

Пример 1.10.3. («*Дилемма заключенного*»). Рассмотрим биматричную игру $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ из примера 1.6.3 с матрицей

$$(A, B) = \begin{bmatrix} (5,5) & (1,10) \\ (10,1) & (2,2) \end{bmatrix}.$$

Здесь у игрока 1 (игрока 2) выбор строки (столбца) 2 является доминирующей стратегией. Поэтому ситуация $(2,2) \in NE(\Gamma)$ является единственной ситуацией в доминирующих стратегиях, т. е. $ND(\Gamma) = D(\Gamma) = NE(\Gamma)$. Однако $NE(\Gamma) \bigcap PO(\Gamma) = \emptyset$.

Пример 1.10.4. («*Услуга за услугу*») Рассмотрим игру $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ из примера 1.6.4. с матрицей

$$(A, B) = \begin{bmatrix} (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) \end{bmatrix}.$$

Здесь у каждого игрока обе стратегии доминирующие, а потому эквивалентные (см. утверждение теоремы 1.9.1). При этом, $ND(\Gamma) = D(\Gamma) = NE(\Gamma) \supset PO(\Gamma)$, где множество парето-оптимальных ситуаций состоит из единственного элемента $(1,1)$.

Пример 1.10.5. Рассмотрим биматричную игру $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ с матрицей

$$(A, B) = \begin{bmatrix} (2,0) & (1,1) \\ (1,1) & (2,0) \end{bmatrix}.$$

В данной игре ни у одного из игроков не существует доминирующих стратегий, причем каждая стратегия игрока — недоминируемая. Множество равновесий по Нэшу является пустым. Таким образом, в данной игре имеют место следующие соотношения: $D(\Gamma) = \emptyset$, $NE(\Gamma) = \emptyset$, $ND(\Gamma) = PO(\Gamma)$, при этом все ситуации парето-оптимальны.

Ограниченная применимость принципа единогласия (равновесия в доминирующих стратегиях) заключается в том, что доминирующие стратегии существуют крайне редко, тем более у всех игроков одновременно, как того требует принцип единогласия.

Пример 1.10.6. (*«Аукцион неделимого товара»*). Рассмотрим сначала аукцион первой цены из примера 1.1.1а. Напомним, что при одинаковых ценах предпочтение здесь отдается игроку с большей ценностью (меньшим номером). Покажем, что стратегия v_i доминирует всякую стратегию, т. е. имеет место неравенство $x_i > v_i$. Действительно, если верно $x_i > v_i$, то для любого $x_{-i} \in X_{-i}$ выполняется неравенство

$$K_i(x_i, x_{-i}) \leq 0 = K_i(v_i, x_{-i}).$$

Отсюда следует равенство $ND_i(\Gamma_N) = [c, v_i]$, причем ни у одного из игроков нет доминирующей стратегии, т. е. $D_i(\Gamma_N) = \emptyset$, $i \in N$.

Для аукциона второй цены (пример 1.1.1б) ситуация иная. Напомним, что в случае второй цены победителем является игрок, назначивший большую цену, но платит он вторую из предложенных цен.

Покажем, что стратегия v_i является доминирующей для игрока i. Действительно, если, выбирая стратегию v_i, игрок выигрывает аукцион при стратегии дополнительной коалиции $x_{-i} \in X_{-i}$, то для всех $x_i \in X_i$ имеет место неравенство

$$K_i(x_i, x_{-i}) \leq 0 = K_i(v_i, x_{-i}) = v_i - x_{-i}^{+}.$$

Если же, выбирая v_i, игрок проигрывает аукцион при стратегии дополнительной коалиции $x_{-i} \in X_{-i}$, то для всех $x_i \in X_i$ выполняется неравенство

$$K_i(x_i, x_{-i}) \leq 0 = K_i(v_i, x_{-i}).$$

Поэтому $D_i(\Gamma_N) = \{v_i\}$ и множество равновесий в доминирующих стратегиях $D(\Gamma_N)$ состоит из единственной ситуации $v_N = (v_1, \ldots, v_n)$. Выбор равновесия в доминирующих стратегиях приводит к победе игрока 1, при этом он платит цену v_2.

Заметим, что в этом примере равновесие в доминирующих стратегиях не является оптимальным по Парето, поскольку оно доминируется ситуацией $v_N^c = (c, \ldots, c)$.

§ 1.11. Сложное равновесие

Использование недоминируемых стратегий связано с исключением из рассмотрения доминируемых стратегий каждого игрока, а тем самым сужения множества стратегий, участвующих в рассмотрении. Как правило, такое исключение стратегий приводит к некоторому подмножеству стратегий игрока, которые несравнимы между собой. Однако такую процедуру можно продолжить, предполагая, что игроки придерживаются только недоминируемых стратегий. В ряде случаев такая процедура последовательного исключения естественным образом останавливается. В итоге подобным образом может быть получен новый класс решений.

Определение 1.11.1. *Для игры* $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i=1}^n, \{K_i\}_{i=1}^n \rangle$ *последовательное исключение доминируемых стратегий означает построение последовательностей множеств* $\{X_i^t\}$ *для всех* $i \in N$ *(где* $X_i^{t+1} = ND_i(K_i, \{X_i^t\}_{i=1}^n)$*), обладающих свойством вложенности друг в друга*

$$X_i = X_i^0 \supset X_i^1 \supset \cdots \supset X_i^t \supset X_i^{t+1} \supset \cdots .$$

Говорят, что *игра* Γ *разрешима по доминированию*, если существует такое целое число $\bar{t}$, что величина выигрыша K_i не зависит от x_i на множестве $X_N^{\bar{t}} = \prod_{i \in N} X_i^{\bar{t}}$, т. е. для всех $x_i, y_i \in X_i^{\bar{t}}$ и $x_{-i} \in X_{-i}^{\bar{t}}$ выполняется равенство

$$K_i(x_i, x_{-i}) = K_i(y_i, x_{-i}).$$

Если игра Γ разрешима по доминированию, то множество $X_N^{\bar{t}}$ в этом случае называется *множеством сложных равновесий*. Заметим, что правило построения множества $X_N^{\bar{t}}$ задает принцип оптимальности (*принцип сложного равновесия*) на множестве игр, разрешимых по доминированию.

Анализ приведенных определений показывает, что реализовать сложное равновесие можно только в том случае, когда все игроки придерживаются парадигмы последовательного исключения доминируемых стратегий. При этом сложные равновесия формируются из стратегий игроков, эквивалентных на $X_N^{\bar{t}}$ в смысле определения 1.9.2.

Замечание 1.11.1. Если в игре существует ситуация в доминирующих стратегиях, то данная игра разрешима по доминированию, при этом процедура исключения доминируемых стратегий сходится за один шаг к множеству равновесий в доминирующих стратегиях. Поэтому сложное равновесие является естественным обобщением понятия равновесия в доминирующих стратегиях. Другими словами, если $D(\Gamma_N) \neq \emptyset$, то $X_N^{\bar{t}} = X_N^1 = D(\Gamma_N)$.

Пример 1.11.1. («*Выборы с президентом*»). Предполагается, что три выборщика (игрока) из множества $N = \{1, 2, 3\}$ должны выбрать один из трех проектов $\{a, b, c\}$. Если большинство голосует за один проект, то этот проект и проходит. Если, однако, ни за какой проект не подано большинство голосов, то проходит тот проект, который предложил игрок 1 (президент). В этом смысле игрок 1 является главным при данном механизме голосования. Предположим, что полезности игроков от реализации проекта (если он будет выбран голосованием) имеют следующую структуру:

$$u_1(c) < u_1(b) < u_1(a),$$
$$u_2(b) < u_2(a) < u_2(c),$$
$$u_3(a) < u_3(c) < u_3(b).$$

Таким образом, мы имеем игру трех лиц в нормальной форме. Множества стратегий у всех игроков одинаковы: $X_i = \{a, b, c\}$. Функции выигрыша игроков вычисляются по правилу:

$$K_i(x_1, x_2, x_3) = u_i(s(x_1, x_2, x_3)),$$

где

$$s(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1, & \text{если} \quad x_2 \neq x_3, \\ x_2, & \text{если} \quad x_2 = x_3. \end{cases}$$

Проведем анализ на доминирование в данной игре. У игрока 1 имеется доминирующая стратегия — голосовать a. Таким образом,

$$X_1^1 = ND_1(K_1, \{X_i\}_{i=1}^3) = D_1 = \{a\}.$$

Игроки 2 и 3 не имеют доминирующих стратегий. Игрок 2 имеет две недоминируемые стратегии a и c. Игрок 3 также имеет две недоминируемых стратегии: b и c. Поэтому

$$X_2^1 = ND_2(K_2, \{X_i\}_{i=1}^3) = \{a, c\},$$

$$X_3^1 = ND_3(K_3, \{X_i\}_{i=1}^3) = \{b, c\}.$$

Продолжим процедуру исключения доминируемых стратегий, предполагая, что на втором шаге все игроки используют только недоминируемые стратегии. В результате имеем

$$X_1^2 = ND_1(K_1, \{X_i^1\}_{i=1}^3) = D_1 = \{a\},$$

$$X_2^2 = ND_2(K_2, \{X_i^1\}_{i=1}^3) = \{c\},$$

$$X_3^2 = ND_3(K_3, \{X_i^1\}_{i=1}^3) = \{c\}.$$

Итак, после двух шагов исключения доминируемых стратегий получаем, что данная игра разрешима по доминированию, при этом сложное равновесие соответствует выбору проекта c, т. е. побеждает большинство.

§ 1.12. Осторожное поведение. Антагонистические игры

В этом параграфе рассматривается принцип оптимальности, который реализует пессимистическое предположение игрока о том, что случится самое худшее.

Рассмотрение не будет использовать информацию о функциях выигрыша всех игроков, но зависит от множеств стратегий всех игроков, так же как и в случае исключения доминируемых стратегий.

Определение 1.12.1. *В игре* $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i=1}^n, \{K_i\}_{i=1}^n \rangle$ *стратегия* $x_i^0 \in X_i$ *называется осторожной стратегией игрока* i*, если выполнено условие*

$$\min_{x_{-i} \in X_{-i}} K_i(x_i^0, x_{-i}) = \max_{y_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} K_i(y_i, x_{-i}) \equiv \alpha_i.$$

Следует отметить, что осторожная стратегия игрока i часто называется *максиминной стратегией* данного игрока, что связано со способом построения стратегии. Число α_i называют *максимальным гарантированным выигрышем игрока* i. Обозначим через $CP_i(\Gamma)$ множество всех осторожных стратегий игрока i.

Введем следующие обозначения: $x_N^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — *ситуация в осторожных стратегиях* и $CP(\Gamma) = \prod_{i \in N} CP_i(\Gamma)$ — *множество всех ситуаций в осторожных стратегиях.*

Принцип оптимальности, реализующий выбор $CP(\Gamma)$, будем в дальнейшем называть *принципом осторожного поведения или принципом гарантированного результата.*

Понятно, что в классе конечных игр осторожное поведение реализуемо. Для непрерывных игр справедлив следующий результат, доказательство которого можно найти, например в [Debreu, 1952].

Утверждение 1.12.1. *В непрерывной игре с компактными множествами стратегий игроков множество осторожных стратегий каждого игрока не пусто и компактно.*

Заметим, что осторожное поведение далеко не всегда «оптимально» в смысле равновесия по Нэшу. В качестве примера, подтверждающего указанное положение, рассмотрим следующую простую игру.

Пример 1.12.1. Пусть дана матричная игра с матрицей выигрышей (проигрышей) игрока 1 (игрока 2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Максимальный гарантированный выигрыш игрока 1 в этой игре равен 0, а максимальный гарантированный проигрыш игрока 2 равен 1. При этом в игре нет равновесия. Поэтому ситуация в осторожных стратегиях не образует ситуацию равновесия.

Если игрок i использует осторожную стратегию $x_i^0 \in X_i$, то он независимо от поведения дополнительной коалиции гарантирует себе выигрыш, по меньшей мере, в размере α_i. Интуитивно понятно, что при любом таком «оптимальном» поведении каждый игрок должен получать выигрыш не меньше максимального гарантированного.

Определение 1.12.2. *Ситуация $x_N \in X_N$ называется индивидуально рациональной для игрока i, если выполняется неравенство $K_i(x_N) \geq \alpha_i$.*

Множество всех индивидуально рациональных ситуаций игрока i в игре Γ обозначим через $IR_i(\Gamma)$. Множество $IR(\Gamma) \equiv \bigcap\limits_{i \in N} IR_i(\Gamma)$ будем называть *множеством индивидуально рациональных ситуаций в игре* Γ. Нетрудно понять, что имеет место включение $CP(\Gamma) \subset IR(\Gamma)$, т.е. в игре каждая ситуация в осторожных стратегиях является индивидуально рациональной. Из определений 1.12.1, 1.12.2 непосредственно следует такой результат.

Утверждение 1.12.2. *Произвольное равновесие по Нэшу в игре* Γ *индивидуально рационально для каждого игрока.*

Формально указанный результат можно записать следующим образом:

$$NE(\Gamma) \subset IR(\Gamma).$$

Отсюда, в частности, получаем, что равновесие в доминирующих стратегиях также индивидуально рационально.

Замечание 1.12.1. Продолжая теперь мысль, сформулированную в замечании 1.6.1, можно сказать, что *принцип оптимальности можно считать «приемлемым» в некотором классе игр в нормальной форме, если он удовлетворяет одновременно свойствам индивидуальной и коллективной рациональности*, т. е. является индивидуально рациональным, равно как и оптимальным по Парето. К сожалению, подобное положение имеет место не всегда.

Однако не все так пессимистично. Например, *в классе игр с нулевой (постоянной) суммой принцип равновесия по Нэшу является приемлемым принципом оптимальности.* Действительно, равновесие по Нэшу является индивидуально рациональным, а в игре с нулевой суммой всякая ситуация оптимальна по Парето.

В дальнейшем будет показано, что в *классе антагонистических игр приемлемым принципом оптимальности является осторожное поведение* (при условии, что равновесие существует).

Приведем пример игры с постоянной суммой, для которой осторожное поведение приемлемо.

Пример 1.12.2. («*Дележ пирога*»). Рассмотрим дележ пирога конечного размера между n игроками. Предполагается, что выигрыш каждого участника равен доле пирога, которая ему достанется в результате дележа. Постулируется следующая n-шаговая процедура дележа пирога. На первом шаге разыгрывается первая доля пирога и игрок 1 объявляет, что он претендует на долю $x_1 \leq 1$. Игрок 2 может с ним согласиться. Если все остальные игроки также согласны с предложением игрока 1, то игрок 1 получает свою долю и покидает игру. Если игрок 2 не согласен, то он должен сделать свою заявку $x_2 < x_1$. Далее игрок 3 может либо согласиться с игроком 2, либо сделать свое предложение и т. д. Игрок, чья заявка $x_i < x_{i-1}$ принята всеми игроками, забирает заявленную долю и покидает игру. После этого игроки по этой схеме разыгрывают очередную долю. На последнем шаге остается один игрок, который забирает остаток. Анализ показывает, что максимальный гарантированный выигрыш каждого игрока равен $1/n$, осторожное поведение оптимально (в смысле равновесия по Нэшу), и оно ведет к справедливому (т. е. с равными долями) дележу пирога.

Исследуем теперь, как осторожное поведение реализуется в классе антагонистических игр. Оказывается, что в этом классе игр осторожное поведение является оптимальным в том смысле, что оно является равновесием в игре.

Рассмотрим антагонистическую игру $\Gamma_1 = \langle X, Y, K \rangle$. Здесь каждый игрок выбором своей стратегии стремится максимизировать свой выигрыш. Однако для игрока 1 он определяется функцией выигрыша $K(x, y)$, а для игрока 2 — противоположной по знаку функцией, т. е. $-K(x, y)$. Предполагается, что оба игрока действуют «разумно», т. е. стремятся к получению максимального выигрыша, считая, что соперник действует наилучшим (для себя) образом. Пусть игрок 1 выбрал стратегию x. Тогда в худшем случае он выиграет величину $\min_y K(x, y)$. Поэтому игрок 1 всегда может гарантировать себе выигрыш в размере $\max_x \min_y K(x, y)$. Если отказаться от предположения достижимости экстремумов, то игрок 1 может всегда получить выигрыш, сколь угодно близкий к величине

$$\underline{v} = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y), \tag{1.26}$$

которую будем называть *нижним значением игры* Γ_1. Если же внешний экстремум (т. е. супремум) в (1.26) достигается, то величина $\underline{v}$ также называется *максимином*, принцип построения стратегии, основанный на максимизации минимального выигрыша, — *принципом максимина*, а выбираемая в соответствии с этим принципом стратегия — *максиминной стратегией* игрока 1.

Для игрока 2 можно провести аналогичные рассуждения. Пусть он выбрал стратегию y. Тогда в худшем случае он проиграет величину $\max_x K(x, y)$. Поэтому игрок 2 всегда может гарантировать себе проигрыш в размере $\min_y \max_x K(x, y)$. Число

$$\overline{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) \tag{1.27}$$

называется *верхним значением игры* Γ_1. Если внешний экстремум (т.е. инфимум) в равенстве (1.27) достигается, то величина $\overline{v}$ называется *минимаксом*, принцип построения стратегии, основанный на минимизации максимального проигрыша, — *принципом минимакса*, а выбираемая в соответствии с этим принципом стратегия — *минимаксной стратегией* игрока 2. Подчеркнем, что существование минимаксной (или максиминной) стратегии определяется достижимостью внешнего экстремума в (1.26) (соответственно в (1.27)).

Для любой антагонистической игры $\Gamma_1 = \langle X, Y, K \rangle$ справедливо следующее утверждение, доказательство которого предлагается провести читателю в качестве простого упражнения. В случае возникновения затруднений можно обратиться к [Воробьев, 1985; Петросян, Зенкевич, Семина, 1998].

Лемма 1.12.1. *В антагонистической игре Γ_1 всегда выполнено неравенство*

$$\overline{v} \geq \underline{v}, \tag{1.28}$$

или, более подробно,

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) \geq \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y). \tag{1.29}$$

В антагонистической игре $\Gamma_1 = \langle X, Y, K \rangle$ понятие равновесия по Нэшу естественным образом приводит к следующему определению.

Определение 1.12.3. *Ситуация* (x^*, y^*) *называется ситуацией равновесия или седловой точкой в игре* $\Gamma_1 = \langle X, Y, K \rangle$*, если неравенства*

$$K(x, y^*) \leq K(x^*, y^*) \leq K(x^*, y) \tag{1.30}$$

имеют место для всех $x \in X$ *и* $y \in Y$*.*

Заметим еще раз, что ситуация равновесия в антагонистической игре является равновесием по Нэшу, но в применении к антагонистической игре свойство равновесия принимает вид (1.30). Поэтому множество всех ситуаций равновесия в игре Γ_1 будем обозначать $NE(\Gamma_1)$.

Естественно возникает вопрос о существовании ситуации равновесия. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема (интересующийся читатель может найти доказательство теоремы и следствия, например, в [Воробьев, 1985; Петросян, Зенкевич, Семина, 1998]).

Теорема 1.12.1. *Для того чтобы в игре* $\Gamma_1 = \langle X, Y, K \rangle$ *существовала ситуация равновесия, необходимо и достаточно, чтобы существовали минимакс и максимин*

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y), \quad \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) \tag{1.31}$$

и, кроме того, выполнялось равенство

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) = \overline{v}. \tag{1.32}$$

Следствие 1.12.1. *Если минимакс и максимин из (1.31) существуют и внешние экстремумы достигаются на* $\overline{y}, \overline{x}$ *соответственно, то имеют место неравенства*

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) \leq K(\overline{x}, \overline{y}) \leq \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y).$$

Определение 1.12.4. *Пусть в игре* $\Gamma_1 = \langle X, Y, K \rangle$ *существует ситуация равновесия. Тогда число* $v = \underline{v} = \overline{v}$ *называют значением игры* Γ_1*.*

Множество ситуаций равновесия в игре Γ_1 обладает свойствами, которые позволяют говорить об *оптимальности ситуации равновесия* и входящих в нее стратегий.

Теорема 1.12.2. [Петросян, Зенкевич, Семина, 1998]. *Пусть* $(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*)$ *— две произвольные ситуации равновесия в антагонистической игре* Γ_1*. Тогда выполняются следующие два условия*

1. $K(x_1^*, y_1^*) = K(x_1^*, y_2^*) = K(x_2^*, y_1^*) = K(x_2^*, y_2^*) = v$;
2. $(x_1^*, y_2^*) \in NE(\Gamma_1), \quad (x_2^*, y_1^*) \in NE(\Gamma_1)$.

Из теоремы 1.12.2 следует, что если ситуация равновесия (x^*, y^*) в игре существует, то выигрыш в любой ситуации равновесия равен значению игры, и при этом любая пара стратегий, входящих в какие-либо ситуации равновесия, также образует ситуацию равновесия. Обозначим через X^*, Y^* проекции множества $NE(\Gamma_1)$ на X, Y соответственно, т. е.

$$X^* = \{x^* \,|x^* \in X, \exists y^* \in Y, (x^*, y^*) \in NE(\Gamma_1)\},$$

$$Y^* = \{y^* \,|y^* \in Y, \exists x^* \in X, (x^*, y^*) \in NE(\Gamma_1)\}.$$

Определение 1.12.5. *Множество $X^*(Y^*)$ называют множеством оптимальных стратегий игрока 1 (игрока 2) в игре Γ_1, а его элементы — оптимальными стратегиями игрока 1 (игрока 2).*

Ранее отмечалось, что даже в матричной игре не всегда существует ситуация равновесия в чистых стратегиях. Вместе с тем в смешанном расширении матричной игры ситуация равновесия существует всегда. В данном параграфе будет рассмотрено смешанное расширение матричной игры и свойства оптимальных смешанных стратегий.

Рассмотрим матричную игру $\Gamma_1(A)$ и ее смешанное расширение $\bar{\Gamma}_1(A) = \langle X, Y, K \rangle$.

Определение 1.12.6. *Пусть $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in X$ — смешанная стратегия игрока 1. Тогда множество индексов*

$$M_x = \{i \mid i \in M, \xi_i > 0\},$$

где $M = \{1, \ldots, m\}$, назовем спектром стратегии x.

Аналогично для смешанной стратегии $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in Y$ *спектр стратегии* определяется следующим образом:

$$N_y = \{j \,|j \in N, \eta_j > 0\},$$

где $N = \{1, \ldots, n\}$.

Определение 1.12.7. *Ситуация (x, y) называется ситуацией равновесия в смешанных стратегиях в игре $\Gamma_1(A)$, если она является ситуацией равновесия в ее смешанном расширении $\bar{\Gamma}_1(A)$.*

Справедлива теорема, которая решает вопрос о существовании ситуации равновесия в матричной игре.

Теорема 1.12.3. *Всякая матричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.*

Следующий результат дает универсальный способ решения матричных игр.

Введем в рассмотрение пару двойственных задач линейного программирования:

$$\min\ xu,\ xA \geq w,\ x \geq 0,$$

$$\max\ yw,\ Ay \leq u,\ y \geq 0,$$

где $u = (1, \ldots, 1) \in R^m$, $w = (1, \ldots, 1) \in R^n$.

Теорема 1.12.4. *Пусть $\Gamma_1(A)$ — матричная игра с положительной матрицей A (все ее элементы положительны). Применительно к указанной выше паре двойственных задач линейного программирования имеют место следующие три утверждения:*

1) *обе задачи линейного программирования имеют решение, причем*

$$\theta = \min_x xu = \max_y yw;$$

2) *значение игры $\Gamma_1(A)$ равно*

$$v = 1/\theta,$$

а стратегии

$$x^* = \bar{x}/\theta,\ y^* = \bar{y}/\theta$$

являются оптимальными, где $\bar{x}, \bar{y}$ — оптимальные решения прямой и двойственной задач линейного программирования соответственно;

3) *любые оптимальные стратегии игроков могут быть получены указанным выше способом.*

Теорема 1.12.4 сводит решение матричной игры в смешанных стратегиях к решению пары двойственных задач линейного программирования. Доказательство приведенных результатов можно найти в [Воробьев, 1985; Петросян, Зенкевич, Семина, 1998].

Изучим свойства оптимальных стратегий, которые в ряде случаев помогают находить значение игры и ситуацию равновесия.

Критерий для ситуации равновесия в смешанных стратегиях имеет следующий вид.

Теорема 1.12.5. *Для того, чтобы ситуация* (x^*, y^*) *была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях в матричной игре* $\Gamma_1(A)$*, необходимо и достаточно выполнение неравенств*

$$K(i, y^*) \leq K(x^*, y^*) \leq K(x^*, j)$$

для всех $i \in M, j \in N$.

Следствие 1.12.2. *Пусть* (i^*, j^*) *— ситуация равновесия в игре* $\Gamma_1(A)$. *Тогда ситуация* (i^*, j^*) *равновесна и в ее смешанном расширении* $\bar{\Gamma}_1(A)$.

Теорема 1.12.6. *Пусть* $x^* = (\xi_1^*, \ldots, \xi_m^*) \in X$, $y^* = (\eta_1^*, \ldots, \eta_n^*) \in Y$ *— оптимальные стратегии в игре* $\bar{\Gamma}_1(A)$, v *— значение игры. Тогда для любого* i*, при котором* $K(i, y^*) < v$*, имеет место равенство* $\xi_i^* = 0$*, а для любого* j *такого, что* $v < K(x^*, j)$*, имеет место равенство* $\eta_j^* = 0$*. Обратно, если верно неравенство* $\xi_i^* > 0$*, то выполнено равенство* $K(i, y^*) = v$*, а если имеет место неравенство* $\eta_j^* > 0$*, то* $v = K(x^*, j)$.

Подробное изложение теории можно найти в [Воробьев, 1985; Петросян, Зенкевич, Семина, 1998].

§ 1.13. Кооперативные игры

Характеристической функцией игры с множеством игроков N называют вещественную функцию v, определенную на всех возможных коалициях $S \subseteq N$, при этом для любой пары непересекающихся коалиций T, S ($T \subset N, S \subset N$) выполняется свойство супераддитивности:

$$v(T) + v(S) \leq v(T \cup S), \quad v(\emptyset) = 0. \tag{1.33}$$

Содержательно выполнение свойства (1.33) означает, что возможности объединенной коалиции не меньше, чем возможности двух непересекающихся коалиций, действующих независимо друг от друга. Поэтому у игроков имеется мотив объединения в максимальную коалицию N.

Говорят, что игра $\Gamma = \langle N, v \rangle$ задана в форме характеристической функции, если указаны множество игроков N и характеристическая функция v.

Из свойства супераддитивности характеристической функции следует, что для любых непересекающихся коалиций $S_1, \ldots, S_k$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} v(S_i) \leq v(N).$$

Отсюда, в частности, следует, что не существует такого разбиения множества игроков на коалиции, при котором суммарный гарантированный выигрыш этих коалиций превышал бы максимальный гарантированный выигрыш максимальной коалиции (т. е. множества всех игроков).

Возникает естественный вопрос: можно ли построить характеристическую функцию игры с множеством игроков N по изначально заданной игре в нормальной форме? Оказывается, на данный вопрос можно дать положительный ответ. Строгое доказательство этого утверждения имеется в [Воробьев, 1985; Петросян, Зенкевич, Семина, 1998].

Лемма 1.13.1. *Для бескоалиционной игры* $\Gamma_N = \left\langle N, \{X_i\}_{i\in N}\,, \ \{K_i\}_{i\in N} \right\rangle$ *введем функцию*

$$v(S) = \sup_{\mu_S} \inf_{\nu_S} \bar{K}_S(\mu_S, \nu_{-S}), \quad S \subset N,$$

где $\mu_S \in \bar{X}_S, \ \ \nu_{-S} \in \bar{X}_{-S}, \ \ \bar{\Gamma}_1(S) = \left\langle \bar{X}_S, \bar{X}_{-S}, \bar{K}_S \right\rangle$ *— смешанное расширение антагонистической игры* $\Gamma_1(S)$. *Тогда для любых непересекающихся коалиций* $T, S (T \subset N, S \subset N)$ *выполняется*

$$v(T) + v(S) \le v(T \cup S), v(\emptyset) = 0. \tag{1.34}$$

Следует отметить, что данный результат справедлив и в более простой форме, когда супремум и инфимум вычисляются по чистым стратегиям x_S, x_{-S} коалиции S, $S \subset N$, и ее дополнительной коалиции $-S$ соответственно.

Утверждение леммы позволяет интерпретировать значение характеристической функции как максимальный гарантированный выигрыш коалиции в некоторой бескоалиционной игре в нормальной форме.

Лемма 1.13.2. *Пусть* $\Gamma_N = \left\langle N, \{X_i\}_{i\in N}\,, \{K_i\}_{i\in N} \right\rangle$ *— бескоалиционная игра с постоянной суммой, причем характеристическая функция определена как в предыдущей лемме, и игра* $\Gamma_1(S)$ *для всякой коалиции* $S \subset N$ *имеет значение в смешанных стратегиях. Тогда выполнено*

$$v(T) + v(S) = v(T \cup S), S \subset N.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения игры с постоянной суммой получаем

$$v(N) = \sum_{i\in N} K_i(x_N) = \sum_{i\in N} \bar{K}_i(\mu_N) = c$$

для всех ситуаций x_N в чистых и μ_N — в смешанных стратегиях.

С другой стороны, имеем

$$v(S) = \sup_{\mu_S} \inf_{\nu_{-S}} \sum_{i \in S} \bar{K}_i(\mu_S, \nu_{-S}) = \sup_{\mu_S} \inf_{\nu_{-S}} (c - \sum_{i \in N \setminus S} \bar{K}_i(\mu_S, \nu_{-S}) =$$
$$= c - \sup_{\mu_S} \inf_{\nu_{-S}} \sum_{i \in S} \bar{K}_i(\mu_S, \nu_{-S}) = c - v(N \setminus S),$$

что завершает доказательство.

В дальнейшем под *кооперативной игрой* будем понимать просто пару $\langle N, v \rangle$, где v — характеристическая функция, удовлетворяющая неравенству (1.34), поскольку содержательная интерпретация самой характеристической функции не имеет принципиального значения.

Определение 1.13.1. *Вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющий условиям*

$$\alpha_i \geq v(i) \quad \textit{для всех} \;\; i \in N, \tag{1.35}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(N), \tag{1.36}$$

где $v(i)$ — значение характеристической функции для одноэлементной коалиции $S = \{i\}$ называется дележом. Множество всех дележей в кооперативной игре $\Gamma = \langle N, v \rangle$ будем обозначать $I(\Gamma)$.

Геометрически множество $I(\Gamma)$ является выпуклым многогранником в R^n (о многогранниках см., например, [Кузютин, Зенкевич, Еремеев, 2003, глава 11]). Грубо говоря, многогранник представляет собой распространение понятия плоского многоугольника на общий пространственный случай.

Условие (1.35) называется *условием индивидуальной рациональности* дележа и означает, что, участвуя в коалиции, каждый игрок получает, по меньшей мере, столько, сколько он мог бы получить, действуя самостоятельно и не заботясь о поддержке каких-либо других игроков. Должно также выполняться условие (1.36), так как в противном случае либо существует распределение, при котором каждый игрок получит больше, чем его доля в конкретном дележе, либо игроки делят между собой нереализуемый выигрыш, а тогда сам дележ неосуществим. Таким образом, вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ является дележом только при выполнении условия (1.36), которое называется *условием коллективной рациональности* дележа.

На основании условий (1.35)–(1.36), для того, чтобы вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ был дележом в кооперативной игре $\Gamma = \langle N, v \rangle$, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\alpha_i = v(i) + \gamma_i \quad \text{для всех} \quad i \in N,$$

причем
$$\gamma_i \geq 0 \text{ для всех } \quad i \in N; \quad \sum_{i\in N} \gamma_i = v(N) - \sum_{i \in N} v(i).$$

Определение 1.13.2. *Игра* $\Gamma = \langle N, v\rangle$ *называется существенной, если*
$$\sum_{i\in N} v(i) < v(N);$$
в противном случае игра $\Gamma = \langle N, v\rangle$ *называется несущественной.*

В несущественной игре имеется единственный дележ $\alpha = (v(1), \ldots, v(n))$, который естественно является оптимальным (в любом приемлемом смысле), а поэтому проблема выбора здесь отсутствует. Поэтому в дальнейшем нас будут интересовать лишь существенные игры.

Пример 1.13.1. Рассмотрим игру трех лиц $N = \{1, 2, 3\}$:
$$v(1) = 0, v(2) = v(3) = 1,$$
$$v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = 2,$$
$$v(1,2,3) = 3.$$
Данная игра является существенной. Подумайте, какое минимальное изменение нужно сделать в значениях характеристической функции, чтобы она стала несущественной?

Что следует понимать под оптимальным поведением в кооперативной игре или под *решением кооперативной игры*?

Определение 1.13.3. *Под принципом оптимальности (или решением)* s *кооперативной игры* $\Gamma = \langle N, v\rangle$ *в форме характеристической функции понимают правило, ставящее в соответствие каждой кооперативной игре* Γ *определенное подмножество* $s(\Gamma)$ *множества дележей* $I(\Gamma)$.

Понятно, что если $s(\Gamma) = \emptyset$, то принцип оптимальности s не применим к данной игре Γ.

Мы рассмотрим три кооперативных принципа оптимальности: C-ядро, вектор Шепли и N-ядро.

§ 1.14. C-ядро кооперативной игры

Во всякой существенной игре множество дележей бесконечно. Проведем анализ таких игр на основе отношения доминирования.

Определение 1.14.1. *Будем говорить, что дележ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ доминирует дележ $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ по коалиции $S \subset N$ (обозначение $\alpha \succ_S \beta$), если*

$$\alpha_i > \beta_i \quad \text{для всех} \quad i \in S, \tag{1.37}$$

$$\alpha(S) \le v(S), \tag{1.38}$$

где использовано обозначение $\alpha(S) \equiv \sum_{i \in S} \alpha_i$.

Первое из условий в определении доминирования дележей по коалиции, т. е. (1.37), означает, что дележ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ лучше дележа $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ для всех членов коалиции, а второе условие, т. е. (1.38), отражает реализуемость дележа $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ коалицией (т.е. коалиция на самом деле может предложить каждому из игроков указанную в дележе долю).

Замечание 1.14.1. Заметим, что доминирование невозможно по одноэлементной коалиции и множеству всех игроков (т. е. по максимальной коалиции), поскольку в первом случае это противоречит (1.37), а во втором — условию (1.38).

Определение 1.14.2. *Говорят, что дележ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ доминирует дележ $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, если существует коалиция $S \subset N$, для которой $\alpha \succ_S \beta$. Доминирование дележа $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ дележом $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ обозначается в виде $\alpha \succ \beta$.*

Перейдем к рассмотрению принципов оптимального поведения в кооперативных играх, т. е. принципов оптимального распределения максимального суммарного выигрыша между игроками.

Возможен следующий подход. Пусть игроки в кооперативной игре пришли к такому соглашению (договору о дележе) о распределении выигрыша максимальной коалиции, при котором ни один из дележей не доминирует указанное соглашение (договорной дележ). Тогда такое распределение устойчиво в том смысле, что ни одной из коалиций невыгодно отделиться от других игроков и распределить между членами коалиции максимальный гарантированный выигрыш коалиции. Подобные рассуждения наводят на мысль о целесообразности рассмотрения множества недоминируемых дележей.

Определение 1.14.3. *Множество недоминируемых дележей кооперативной игры $\Gamma = \langle N, v \rangle$ называется ее C-ядром.*

Множество всех дележей из C-ядра кооперативной игры $\Gamma = \langle N, v \rangle$ будем обозначать $C(\Gamma)$. Из определения следует, что имеет место включение $C(\Gamma) \subset I(\Gamma)$. Справедлива следующая теорема, характеризующая C-ядро.

Теорема 1.14.1. *Для того чтобы дележ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ принадлежал C-ядру, необходимо и достаточно выполнение для всех $S \subset N$ следующих неравенств:*

$$v(S) \leq \alpha(S) = \sum_{i \in S} \alpha_i. \tag{1.39}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для несущественных игр утверждение теоремы очевидно. Рассмотрим произвольную существенную игру. Докажем достаточность. Пусть для дележа $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ выполнено условие (1.39). Покажем, что дележ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ принадлежит C-ядру. Предположим противное, т.е. найдется такой дележ $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, что $\beta(S) > \alpha(S)$, $\beta(S) \leq v(S)$. Эти неравенства противоречат соотношению (1.39).

Проверим необходимость. Вновь предположим противное, т. е. дележ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ принадлежит C-ядру, но существует коалиция $S \subset N$, для которой $\alpha(S) < v(S)$. Положим

$$\beta_i = \alpha_i + \frac{v(S) - \alpha(S)}{s} \quad \text{для всех} \quad i \in S,$$

$$\beta_i = v(i) + \frac{v(N) - v(S) - \sum\limits_{i \in N \setminus S} v(i)}{n - s} \quad \text{для всех} \quad i \notin S,$$

где s — число элементов множества S. Непосредственно проверяется, что вектор $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ является дележом, причем $\beta \succ_S \alpha$. Отсюда следует, что дележ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ не принадлежит C-ядру.

Из теоремы 1.14.1 следует, что C-ядро является замкнутым, выпуклым подмножеством множества всех дележей. Однако существенный недостаток такого подхода к понятию оптимальности в кооперативной игре — это возможная пустота C-ядра.

Приведем содержательную аргументацию в пользу C-ядра на основе приведенного критерия принадлежности C-ядру.

Пусть игроки договариваются о выборе кооперативного соглашения. Из свойства супераддитивности характеристической функции следует, что такое соглашение ведет к образованию максимальной коалиции (т. е. коалиции, состоящей из всех игроков). Далее решается вопрос о способе дележа суммарного дохода.

Минимальным требованием для получения согласия игроков выбрать дележ является индивидуальная рациональность этого дележа. Пусть игроки договариваются о выборе конкретного дележа. Против выбора дележа может возражать некоторая коалиция, требующая для себя более выгодного распределения. Указанная коалиция выдвигает это требование, угрожая в противном случае нарушить общую кооперацию (это вполне реальная угроза, так как для достижения выигрыша максимальной коалиции необходимо единодушное согласие всех ее игроков). Предположим, что остальные игроки реагируют на эту угрозу объединенными действиями против указанной коалиции. Тогда максимальный гарантированный доход коалиции оценивается значением характеристической функции. Утверждение теоремы означает существование стабилизирующей угрозы со стороны дополнительной коалиции. Тем самым, *C-ядром кооперативной игры является множество устойчивых в смысле коалиционных угроз распределений максимального суммарного дохода игроков.*

Пример 1.14.1. Рассмотрим игру трех лиц с характеристической функцией

$$v(1) = 20,\ v(2) = 30,\ v(3) = 0,$$
$$v(1,2) = 80,\ v(1,3) = 50,\ v(2,3) = 65,$$
$$v(1,2,3) = 100.$$

Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в игре принадлежит C-ядру тогда и только тогда, когда выполняются следующие соотношения

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 100, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq 80,\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 65,\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 50 \\ \alpha_1 \geq 20,\ \alpha_2 \geq 30,\ \alpha_3 \geq 0. \end{cases}$$

Множество решений этой системы неравенств представляет собой выпуклую оболочку следующих трех дележей: (35, 45, 20), (35, 50, 15), (30, 50, 20). Геометрическую интерпретацию множества решений систем линейных неравенств, понятия выпуклой оболочки множеств и выпуклого многогранника см., например, в [Кузютин, Зенкевич, Еремеев, 2003]. Типичным представителем ядра является его центр (т.е. среднее арифметическое крайних точек, а именно: $\alpha^* = (33.3, 48.3, 18.3)$). Этот дележ представляет собой определенный справедливый компромисс, расположенный внутри C-ядра. Заметим также, что дележ α^* обладает свойством, что все двухэлементные коалиции имеют одинаковый дополнительный доход: $\alpha_i + \alpha_j - v(i,j) = 1.6$.

Приведем еще один критерий принадлежности дележа C-ядру, который непосредственно следует из предыдущей теоремы 1.14.1.

Теорема 1.14.2. *Дележ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ принадлежит C-ядру в том и только том случае, когда для любой коалиции $S \subset N$ выполняется неравенство:*

$$v(N) - v(N \backslash S) \geq \alpha(S) = \sum_{i \in S} \alpha_i. \tag{1.40}$$

Доказательство данной теоремы оставляем читателю в качестве простого упражнения.

Пример 1.14.2. (*Симметричные игры*). В симметричной игре коалиции с одинаковым числом игроков имеют одинаковый выигрыш. Характеристическая функция такой игры имеет следующий вид:

$$v(S) = f(|S|)$$

для всех $S \subset N$, где $|S|$ — число элементов множества S.

Без потери общности предположим, что $f(1) = 0$. Тогда множество дележей игры $\Gamma = \langle N, v \rangle$ определяется решением следующей системы:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = f(n) = v(N),\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

C-ядро является выпуклым многогранником из множества дележей, причем симметричным (игра симметричная). Поэтому можно показать, что C-ядро не пусто тогда и только тогда, когда оно содержит центр множества всех дележей, т. е. точку с координатами $\alpha_i^* = f(n)/n$ для всех $i \in N$. Тогда из (1.39) получаем, что C-ядро не пусто тогда и только тогда, когда верно неравенство

$$(1/|S|) f(|S|) \leq (1/n) f(n) \quad \text{для всех} \quad S \subset N.$$

Тем самым, C-ядро не пусто, если для каждой коалиции средняя доля гарантированного выигрыша игрока не превосходит этой величины для максимальной коалиции.

§ 1.15. Условия не пустоты C-ядра

Пример 1.14.2 носит частный характер. В общем случае возникает естественный вопрос: когда C-ядро кооперативной игры не пусто, и какие имеются общие критерии проверки его не пустоты?

Для ответа на этот вопрос введем следующие понятия. В дальнейшем будем называть коалицию *собственной*, если она не совпадает с максимальной коалицией.

Определение 1.15.1. *Для заданного множества игроков N сбалансированным покрытием называют такое отображение δ из множества собственных коалиций в отрезок $[0, 1]$, что равенство*

$$\sum_{\{S|i \in S\}} \delta_S = 1$$

выполняется для всех игроков $i \in N$, где суммирование ведется по всем собственным коалициям, содержащим игрока $i \in N$.

Теорема 1.15.1. *C-ядро кооперативной игры $\Gamma = \langle N, v \rangle$ не пусто тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного покрытия δ выполнено неравенство*

$$\sum_{S \subset N, S \neq N} \delta_S \cdot v(S) \leq v(N).$$

Игры, удовлетворяющие условиям теоремы, называют *сбалансированными.* Заметим, что свойство сбалансированности игры влечет свойство супераддитивности.

Сбалансированные покрытия образуют выпуклый компактный многогранник. Поскольку такой многогранник представляет собой выпуклую оболочку своих крайних точек, то выполнение нераверства достаточно проверить для указанных крайних точек многогранника. Если удастся найти эти крайние точки, то свойство сбалансированности может быть записано в виде системы линейных неравенств, в которых участвует характеристическая функция v. В частности, для игры трех лиц имеет место следующий результат.

Следствие 1.15.1. *Игра $\Gamma = \langle N, v \rangle$ с тремя игроками имеет не пустое C-ядро тогда и только тогда, когда выполнено*

$$v(1) + v(2) + v(3) \leq v(N),$$
$$v(1) + v(2, 3), v(2) + v(1, 3), v(3) + v(1, 2) \leq v(N),$$
$$\tfrac{1}{2}[v(1, 2) + v(2, 3) + v(1, 3)] \leq v(N).$$

Пример 1.15.1. Легко проверить, что кооперативная игра из примера 1.14.1 удовлетворяет условиям следствия 1.15.1. Проверьте, удовлетворяет ли условиям следствия игра из примера 1.13.1?

Второй подход к проверке не пустоты C-ядра связан с понятием *выпуклой кооперативной игры.*

Определение 1.15.2. *Кооперативная игра* $\Gamma = \langle N, v\rangle$ *называется выпуклой, если она обладает свойством:*

$$v(T) + v(S) \leq v(T \bigcup S) + v(T \bigcap S).$$

Теорема 1.15.2. *Если кооперативная игра* $\Gamma = \langle N, v\rangle$ *выпуклая, то ее* C*-ядро не пусто.*

Доказательство теоремы см., например, в [Печерский, Яновская, 2004]. Для выпуклой кооперативной игры можно конструктивно построить все крайние точки C-ядра, а тем самым и само C-ядро.

§ 1.16. Вектор Шепли. N-ядро

Множество дележей, входящих в C-ядро кооперативной игры, а также жесткие условия существования недоминируемых дележей (не пустоты C-ядра) мотивируют поиск таких принципов оптимальности, существование и единственность которых имели бы место в каждой кооперативной игре. К таким принципам оптимальности относится вектор Шепли и N-ядро.

Носителем игры $\Gamma = \langle N, v\rangle$ называется такая коалиция T, что равенство $v(S) = v(S \cap T)$ имеет место для любой коалиции $S \subset N$.

Содержательно последнее определение означает, что любой игрок, не принадлежащий носителю, является в определенном смысле «болваном», т. е. он ничего не может изменить в действиях ни одной из коалиций.

Пример 1.16.1. Рассмотрим игру трех лиц $N = \{1, 2, 3\}$ с характеристической функцией

$$v(1) = 0, v(2) = v(3) = 1,$$
$$v(1, 2) = v(1, 3) = 1, v(2, 3) = 3,$$
$$v(1, 2, 3) = 3.$$

В этой игре носителем является коалиция $\{2, 3\}$, при этом игрок 1 — «болван».

Рассмотрим произвольную перестановку Π упорядоченного множества игроков $N = \{1, \ldots, n\}$. С этой перестановкой связана подстановка π, т.е. такая взаимно однозначная функция $\pi : N \to N$, что для любого $i \in N$ значение $\pi(i) \in N$ представляет собой элемент из $N = \{1, \ldots, n\}$, в который переходит $i \in N$ в перестановке Π.

Определение 1.16.1. *Пусть $\Gamma = \langle N, v\rangle$ — кооперативная игра, Π — перестановка множества $N = \{1, \ldots, n\}$, а $\pi : N \to N$ — соответствующая ей подстановка. Тогда через $\Gamma_\pi = \langle N, \pi v\rangle$ обозначим такую игру $\langle N, u\rangle$, что для любой коалиции $S \subset N$, $S = \{i_1, \ldots, i_s\}$ верно*

$$u(\{\pi(i_1), \ldots, \pi(i_s)\}) = v(S).$$

Заметим, что игра $\Gamma_\pi = \langle N, \pi v\rangle$ отличается от игры $\Gamma = \langle N, v\rangle$ лишь тем, что в последней игроки поменялись местами в соответствии с перестановкой Π.

На основе данных определений изложим *аксиоматику Шепли.* Сначала отметим, что при одном и том же множестве игроков кооперативная игра отождествляется с характеристической функцией игры. В этом смысле можно говорить о сумме игр или о произведении игры на число.

Поставим в соответствие каждой кооперативной игре $\Gamma = \langle N, v\rangle$ вектор $\varphi[v] = (\varphi_1[v], \ldots, \varphi_n[v])$, компоненты которого будем интерпретировать как выигрыши, полученные игроками в результате соглашения или решения некоторого арбитра. При этом будем считать, что указанное соответствие удовлетворяет нижеследующим аксиомам. Использование аксиоматического подхода при формировании оптимального решения называется *характеризацией решения.*

Аксиома 1. *Если T — произвольный носитель игры $\Gamma = \langle N, v\rangle$, то выполнено равенство:*

$$\sum_{i \in T} \varphi_i[v] = v(T).$$

Аксиома 2. *Для любой подстановки $\pi : N \to N$ и любого $i \in N$ имеет место равенство:*

$$\varphi_{\pi(i)}[\pi v] = \varphi_i[v].$$

Аксиома 3. *Если $\langle N, v\rangle$ и $\langle N, u\rangle$ — две любые кооперативные игры с одинаковым множеством игроков, то справедливо равенство:*

$$\varphi_i[u + v] = \varphi_i[u] + \varphi_i[v].$$

Определение 1.16.2. *Пусть* $\varphi : \{\langle N, v\rangle\} \to R^n$ *— функция, ставящая в соответствие каждой игре* $\Gamma = \langle N, v\rangle$ *вектор* $\varphi[v] = (\varphi_1[v], \ldots, \varphi_n[v])$, *удовлетворяющий аксиомам 1–3. Тогда вектор* $\varphi[v] = (\varphi_1[v], \ldots, \varphi_n[v])$ *называется вектором значений или вектором Шепли игры* $\Gamma = \langle N, v\rangle$.

Теорема 1.16.1. (Шепли). *Существует единственная функция* $\varphi : \{\langle N, v\rangle\} \to R^n$, *определенная на множестве всех игр* $\Gamma = \langle N, v\rangle$ *и удовлетворяющая аксиомам 1–3, при этом компоненты вектора Шепли вычисляются по формулам:*

$$\varphi_i[v] = \sum_{\{S | i \in S \subset N\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \backslash i)], \ \text{для всех}\ i \in N,$$

где s *обозначает количество игроков в коалиции* S.

Доказательство данного результата см., например, в [Петросян, Зенкевич, Семина, 1998; Печерский, Беляева, 2001].

Вектору Шепли можно дать следующее содержательное истолкование. Предположим, что игроки решили встретиться в определенном месте и в определенное время с целью переговоров по дележу выигрыша максимальной коалиции. Естественно, что из-за случайных отклонений все они будут прибывать к месту встречи в различные моменты времени. Предположим, что любой порядок прибытия игроков (т. е. каждая из всех возможных перестановок набора игроков) имеет одну и ту же вероятность $1/n!$. Далее предположим, что если игрок i, прибывая, застает на месте только членов коалиции $S \backslash i$ (т. е. остальные игроки еще не подошли), то он получает выигрыш, равный величине $v(S) - v(S \backslash i)$. Иначе говоря, его выигрышем является тот вклад, который он вносит в максимальный гарантированный выигрыш новой коалиции. Тогда компонента вектора Шепли $\varphi_i[v]$, являясь по определению дележа долей выигрыша игрока i, представляет собой не что иное, как математическое ожидание выигрыша игрока i в соответствии с описанной выше вероятностной схемой.

Несмотря на существование и единственность в каждой кооперативной игре, основным недостатком вектора Шепли является тот факт, что он не обязательно принадлежит C-ядру. Другими словами, он не является селектором (т. е. представителем) C-ядра. Поэтому желательно построить такой дележ (такой принцип оптимальности), который сохранял бы положительные свойства вектора Шепли и принадлежал C-ядру в случае его не пустоты. Наиболее интересным представителем C-ядра является так называемое N-ядро.

Определение 1.16.3. *Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — дележ кооперативной игры $\Gamma = \langle N, v\rangle$. Величина $e(\alpha, S) = v(S) - \alpha(S)$, $\alpha(S) = \sum\limits_{i \in S} \alpha_i$ называется эксцессом дележа $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ по коалиции $S \subset N$.*

Величина $e(\alpha, S)$ может быть интерпретирована как мера неудовлетворенности коалиции распределением выигрышей, которое предписывается дележом $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Заметим здесь, что чем больше $\alpha(S)$, тем меньше эксцесс, т.ė. тем меньше неудовлетворенность дележом у данной коалиции. Наоборот, чем больше $v(S)$, тем такая неудовлетворенность больше.

Пусть $I(\Gamma)$ — множество дележей игры $\Gamma = \langle N, v\rangle$. Для любого дележа $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ определим *вектор эксцессов* $e(\alpha)$, компоненты которого суть эксцессы дележа $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ для всех коалиций, упорядоченные в порядке убывания, т. е.

$$e(\alpha) = (e(\alpha, S_1), e(\alpha, S_2), \ldots, e(\alpha, S_{2^n})).$$

Будем говорить, что вектор $e(\alpha)$ *лексикографически меньше* вектора $e(\beta)$ и записывать это как $e(\alpha) <_{lex} e(\beta)$, если найдется такое натуральное число m, и что равенство $e(\alpha, S_i) = e(\beta, S_i)$ имеет место для всех $i < m$ и, кроме того, выполнено неравенство $e(\alpha, S_m) < e(\beta, S'_m)$, где $e(\beta, S'_i)$ — i-я компонента вектора эксцессов $e(\beta)$.

Определение 1.16.4. *N-ядром кооперативной игры $\Gamma = \langle N, v\rangle$ называют такое подмножество дележей $N(\Gamma)$, которое состоит из дележей, для которых соответствующие векторы эксцессов минимальны относительно лексикографического отношения порядка, т. е.*

$$N(\Gamma) = \{\alpha \in I \,| e(\alpha) \le {}_{lex} e(\beta), \beta \in I\} .$$

Заметим, что в определении 1.16.4 используется нестрогое лексикографическое отношение порядка $a \le_{lex} b$ на множестве векторов эксцессов, что означает: $a <_{lex} b$ или $a = b$.

Теорема 1.16.2. (Шмайдлер). *N-ядро кооперативной игры $\Gamma = \langle N, v\rangle$ не пусто, состоит из единственного дележа и лежит в C-ядре, если последнее не пусто.*

Доказательство теоремы можно найти в [Shmeidler, 1971] или [Печерский, Яновския, 2004].