

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО МИКРОЭКОНОМИКЕ

Задача 1. Четыре индивида потребляют два блага в количествах X и Y . Их предпочтения описываются функциями полезности

$$U_1 = X^{0.2}Y^{0.3}; \quad U_2 = 2\ln X + 3\ln Y; \quad U_3 = X^2Y^2; \quad U_4 = 4X^2Y^3.$$

Определить, какие индивиды имеют одинаковые предпочтения, а какие — различные.

Решение. Первый, второй и четвертый имеют одинаковые предпочтения, предпочтения третьего отличны от остальных. Можно заметить, что

$$U_2 = 10\ln U_1, \quad U_4 = 4U_1^{10}$$

— монотонно возрастающие функции, а это свидетельствует об одинаковости предпочтений. В более сложных случаях можно воспользоваться предельными нормами замещения. Так, для функции U_1

$$\frac{\partial U_1}{\partial X} = 0.2X^{-0.8}Y^{0.3}; \quad \frac{\partial U_1}{\partial Y} = 0.3X^{0.2}Y^{-0.7},$$

так что предельная норма замещения равна

$$MRS_{XY}(U_1) = \frac{\partial U_1 / \partial X}{\partial U_1 / \partial Y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Y}{X}.$$

Как нетрудно убедиться, тот же результат справедлив для U_2 и U_4 , а для U_3 результат будет иным:

$$MRS_{XY}(U_3) = \frac{\partial U_3 / \partial X}{\partial U_3 / \partial Y} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Y}{X}.$$

Задача 2. Индивид, получающий доход 900 ед., потребляет два блага в количествах X и Y , его предпочтения описываются функцией полезности $U = XY^3$. Найти набор благ, потребляемый индивидом при ценах $P_X = 5$, $P_Y = 12$.

Решение. Предельные полезности благ равны

$$MU_X = \frac{\partial U}{\partial X} = Y^3; \quad MU_Y = \frac{\partial U}{\partial Y} = 3XY^2.$$

Предельная норма замещения равна отношению цен:

$$MRS_{XY} = \frac{\partial U / \partial X}{\partial U / \partial Y} = \frac{Y}{3X} = \frac{5}{12}.$$

Отсюда $Y = 1.25X$. Подставляя это соотношение в бюджетное условие $P_X X + P_Y Y = 900$, найдем: $X = 400$, $Y = 500$.

Задача 3. Зависимость от дохода Y объема q потребления домашним хозяйством некоторого блага описывается равенством

$$q(Y) = \frac{Y^2}{(100 + Y)^3}.$$

- а) В каком диапазоне значений дохода данное благо является нормальным, а в каком — низшим?
б) В каком диапазоне значений дохода данное благо является необходимым, а в каком — роскошным?

Решение. а) К нормальным относятся блага, объем потребления которых с ростом дохода возрастает; к низшим — те блага, объем потребления которых с ростом дохода убывает. При этом отношение потребителя к благу зависит от дохода: обычно при достаточно высоком доходе благо из категории нормальных переходит в категорию низших. Достаточно убедиться (например, с помощью дифференцирования), что функция $q(Y)$ при $0 < Y < 100$ возрастает (т. е. благо является нормальным), а при $Y > 100$ убывает (благо становится низшим).

б) К необходимым относят нормальные блага, доля которых в бюджете с ростом дохода убывает, к роскошным — блага, доля которых с ростом дохода возрастает. Доля расходов на потребление данного блага в бюджете определяется величиной pq/Y , где p — цена блага. Функция

$$\frac{pq(Y)}{Y} = \frac{pY}{(100+Y)^3},$$

как нетрудно убедиться, возрастает при $0 < Y < 50$ (блага является роскошным), а при $Y > 50$ — убывает, так что к необходимым его можно отнести при $50 < Y < 100$.

Задача 4. Индивид потребляет два блага в количествах X и Y ; его спрос на блага описывается уравнениями

$$Q_X^D = 100 - 4P_X - 8P_Y; \quad Q_Y^D = 50 - 2P_X - 4P_Y.$$

Найти прямые и перекрестные эластичности спроса на блага при ценах $P_X = 2$, $P_Y = 3$. Каков характер взаимозависимости благ в потреблении?

Решение. Прямая и перекрестная эластичности спроса на первое благо равны

$$E[Q_X|P_X] = \frac{-4P_X}{100 - 4P_X - 8P_Y} = \frac{-8}{68} = -0.118;$$

$$E[Q_X|P_Y] = \frac{-4P_X}{100 - 4P_X - 8P_Y} = \frac{-24}{68} = -0.353.$$

Аналогично находятся эластичности спроса на второе благо:

$$E[Q_Y|P_X] = -0.118; \quad E[Q_Y|P_Y] = -0.353.$$

Отрицательные перекрестные эластичности свидетельствуют о том, что блага являются взаимно дополняющими. Более того, они являются абсолютными дополнителями друг друга: они потребляются комплектно, каждая единица второго блага потребляется с двумя единицами первого, о чем свидетельствует прямое сопоставление функций спроса.

Задача 5. Спрос индивида на некоторый товар описывается функцией $Q^D = \sqrt{300 - P}$. При каких ценах его спрос является высокоэластичным, при каких — низкоэластичным?

Решение. Модуль эластичности спроса описывается равенством

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{300 - P}.$$

Высокоэластичным признают спрос при $\eta > 1$, что имеет место при $P > 200$. Соответственно, низкоэластичный спрос ($\eta < 1$) имеет место при $P < 200$.

Задача 6. Фирма производит продукт в количестве q , используя два ресурса в количествах X и Y ; ее производственная функция $q = 2X^{0.2}Y^{0.8}$. Цены ресурсов $p_X = 5$, $p_Y = 10$. Привести уравнение траектории оптимального роста и найти функцию затрат фирмы.

Решение. Траектория оптимального роста — это множество комбинаций ресурсов, минимизирующих затраты при каждом значении объема производства. На этой траектории предельная норма технического замещения равна отношению цен ресурсов:

$$MRTS_{XY} = MP_X / MP_Y = p_X / p_Y,$$

или

$$MRTS_{XY} = \frac{2 \cdot 0.2 \cdot X^{-0.8} Y^{0.8}}{2 \cdot 0.8 \cdot X^{0.2} Y^{-0.2}} = 0.25 \cdot \frac{Y}{X} = \frac{5}{10},$$

откуда следует уравнение траектории оптимального роста $Y = 2X$. На ней выполняется равенство $q = 2X^{0.2} \cdot (2X)^{0.8}$, или $q = 2^{1.8}X$. Отсюда $X = 2^{-1.8}q \approx 0.287q$, $Y = 2X \approx 0.574q$. Эти результаты позволяют определить функцию затрат фирмы:
 $TC(q) = p_X X + p_Y Y = 5 \cdot 0.287q + 10 \cdot 0.574q = 7.18q$.

Задача 7. Общие затраты фирмы описываются равенством $TC = 200 + 10q + 0.5q^2$. Привести выражения для средних и предельных затрат. Чему равен минимум средних затрат и при каком объеме продукции он достигается?

Решение. Средние и предельные затраты описываются равенствами

$$AC = \frac{200}{q} + 10 + 0.5q; \quad MC = 10 + q.$$

Минимум средних затрат достигается при $AC = MC$, т. е. при $q = 20$; $\min AC = 30$.

Задача 8. Общие затраты фирмы описываются равенством $TC = 800 + 20q + 2q^2$. Фирма продает свой продукт по цене $P = 120$. Найти зависимость прибыли от объема выпуска. При каких значениях объема деятельность фирмы окажется безубыточной? При каком объеме прибыль максимальна?

Решение. При цене $P = 120$ общая выручка фирмы составляет $TR = 120q$, так что ее прибыль описывается функцией $\Pi(q) = TR - TC = -800 + 100q - 2q^2$. Неравенство $-800 + 100q - 2q^2 \geq 0$ выполняется при $10 \leq q \leq 40$. Максимум прибыли достигается при $q = 25$ и равняется $\Pi(25) = 450$.

Задача 9. На совершенно конкурентном рынке с функцией спроса $Q^D(P) = 2000 - 20P$ действуют фирмы с функциями затрат $TC(q) = 450 + 10q + 2q^2$. Сколько фирм будет на рынке в условиях равновесия длительного периода?

Решение. В равновесии длительного периода устанавливается цена, равная минимуму средних затрат каждой из фирм. Средние затраты принимают минимальное значение при объеме производства, при котором они равны предельным затратам, $AC(q) = MC(q)$, то есть $450/q + 10 + 2q = 10 + 4q$, откуда

$$q = \sqrt{450/2} = 15.$$

При этом $AC = MC = 70$, и на этом же уровне устанавливается цена, $P = 70$. Объем спроса при этом равен

$$Q = 2000 - 20 \cdot 70 = 600.$$

Число фирм равно $Q/q = 600/15 = 40$.

Задача 10. На рынке с функцией спроса $Q^D = 300 - 5P$ действует монополия с функцией затрат $TC = 300 + 20Q + 0.3Q^2$. Найти прибыль монополии.

Решение. Монополия, максимизирующая прибыль, выбирает объем продаж, при котором предельная выручка равна предельным затратам. Обратная функция спроса $P^D = 60 - 0.2Q$, так что предельная выручка

$$MR(Q) = \frac{dTR(Q)}{dQ} = \frac{d[Q \cdot P^D(Q)]}{dQ} = 60 - 0.4Q.$$

Приравняв ее предельным затратам $MC(Q) = 20 + 0.6Q$, находим, что максимум прибыли достигается при выпуске $Q = 40$. При этом по условиям спроса устанавливаются цена и выручка

$$P = 60 - 0.2 \cdot 40 = 52, \quad TR = 40 \cdot 52 = 2080.$$

Затраты составляют $TC = 300 + 20 \cdot 40 + 0.3 \cdot 40^2 = 1580$, так что прибыль равна $TR - TC = 2080 - 1580 = 500$.

Задача 11. Дуополия встречается со спросом $Q^D = 40 - 0.2P$. Функции затрат фирм:

$$TC_1(q_1) = 250 + 15q_1; \quad TC_2(q_2) = 300 + 10q_2.$$

Здесь Q — рыночный объем продаж, q_1, q_2 — объемы продаж фирм.

Найти рыночную цену, объемы продаж и прибыли фирм в состоянии равновесия Курно.

Решение. Модель Курно предполагает объемную конкуренцию олигополистов: каждый из них выбирает объем продаж, максимизирующий его прибыль при условии, что его конкуренты не изменяют своих объемов продаж. Равновесие Курно — состояние рынка, при котором каждый участник понес бы потери, изменив свой выбор в одностороннем порядке.

Обратная функция спроса:

$$P^D = 200 - 5Q = 200 - 5(q_1 + q_2).$$

Каждая из фирм решает задачу:

$$\Pi_1(q_1, q_2) = (200 - 5q_1 - 5q_2) \cdot q_1 - (250 + 15q_1) \rightarrow \max_{q_1};$$

$$\Pi_2(q_1, q_2) = (200 - 5q_1 - 5q_2) \cdot q_2 - (300 + 10q_2) \rightarrow \max_{q_2}.$$

Условия максимума прибыли:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 200 - 10q_1 - 5q_2 - 15 = 0; \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = 200 - 5q_1 - 10q_2 - 10 = 0 \end{cases}$$

сводятся к системе уравнений

$$185 = 10q_1 + 5q_2; \quad 190 = 5q_1 + 10q_2.$$

Ее решение: $q_1 = 12, q_2 = 13$; суммарный объем продаж $Q = 25$, цена $P = 200 - 5 \cdot 25 = 75$. Выручка и затраты фирм:

$$TR_1 = 75 \cdot 12 = 900; \quad TC_1 = 250 + 15 \cdot 12 = 430;$$

$$TR_2 = 75 \cdot 13 = 975; \quad TC_2 = 300 + 10 \cdot 12 = 420.$$

Таким образом, прибыли фирм равны

$$\Pi_1 = 900 - 430 = 470; \quad \Pi_2 = 975 - 420 = 555.$$

Задача 12. Фирма является монополистом на внутреннем рынке, где встречается со спросом $Q^D = 200 - 4P$. Она покупает сырье на мировом рынке в условиях совершенной конкуренции по цене $W = 10$. Производственная функция фирмы $Q = 5X$, где X — объем потребляемого сырья. Определить объем производства и прибыль фирмы.

Решение. Равновесие фирмы на рынках продукта и единственного переменного ресурса достигается при выполнении условия $MR \cdot MP = ME$, где MR — предельная выручка на рынке продукта, MP — предельный продукт ресурса, ME — предельные расходы на ресурс. Поскольку сырье покупается на совершенно конкурентном рынке, его цена не зависит от объема покупок, так что $ME = W = 10$.

Предельная выручка монополии

$$MR = \frac{d}{dQ}(Q \cdot P^D(Q)) = \frac{d}{dQ}(Q \cdot (50 - 0.25Q)) = 50 - 0.5Q.$$

Предельный продукт ресурса

$$MP = \frac{dQ}{dX} = 5.$$

Таким образом, объем производства определяется условием $(50 - 0.5Q) \cdot 5 = 10$, откуда $Q = 96$. Цена продажи продукта равна $P = 50 - 0.25 \cdot 96 = 26$, выручка $TR = 26 \cdot 96 = 2496$. При данной производственной функции $Q = 5X$ объем потребляемого сырья $X = Q/5 = 19.2$, расходы на сырье $TE = W \cdot X = 10 \cdot 19.2$, так что прибыль фирмы равна $2496 - 192 = 2304$.

Задача 13. Общество состоит из двух индивидов, A и B . Множество потребительских возможностей определяется условием $(U_A - 20)^2 + (U_B - 40)^2 \leq 2500$, $U_A \geq 0$, $U_B \geq 0$. Описать подмножество потребительских возможностей, эффективных по Парето.

Решение. В координатах U_A , U_B множество потребительских возможностей — часть круга радиуса 50 с центром в точке $(20, 40)$, лежащая в положительном квадранте. Подмножество эффективных по Парето возможностей — «северо-восточная» четверть окружности: $(U_A - 20)^2 + (U_B - 40)^2 = 2500$, $U_A \geq 20$, $U_B \geq 40$.

Задача 14. Фирма производит продукт с предельными частными затратами $MPC = 20 + 5Q$ и загрязняет внешнюю среду; предельные внешние затраты, обусловленные загрязнением, составляют $MEC = 12$. Предельные общественные выгоды от производства этого продукта $MSB = 80 - 3Q$.

- а) Каков объем производства продукта без вмешательства государства?
- б) Какова должна быть ставка корректирующего налога? Каков при введении налога объем производства продукта?

Решение. а) Общество оплачивает общественные выгоды, так что оптимальный для фирмы объем производства определяется равенством $MSB = MPC$, откуда $Q = 7.5$.

б) Корректирующий налог имеет своей целью интернализацию отрицательного внешнего эффекта, так что его ставка $t = MEC = 12$. Таким образом, на фирму дополнительно к частным возлагаются внешние затраты. Теперь оптимальный объем производства определяется равенством предельных общественных затрат

$$MSC = MPC + MEC = 32 + 5Q$$

предельным общественным выгодам ($MSC = MSB$). Из равенства $32 + 5Q = 80 - 3Q$ следует $Q = 6$.
