О задаче максимизации робастной полезности

А. А. Гущин
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Рассматривается “общая” модель финансового рынка, т.е. вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и множество случайных величин $\mathcal{A}$ на нем, интерпретируемых как возможные прибыли инвестора, отвечающие различным стратегиям. Предпочтения инвестора характеризуются функционалом робастной полезности

$$\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(x+\xi), \quad \xi \in \mathcal{A},$$

где $U(\cdot)$ — функция полезности (вогнутая неубывающая функция со значениями в $[-\infty, +\infty)$), $\mathscr{Q}$ — множество “субъективных” вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{F})$, отражающее неопределенность вероятностной модели, x — начальный капитал инвестора. Оптимальной стратегией инвестора будет та, на которой достигается максимальное значение функционала робастной полезности, обозначаемое $u(x)$.

Стандартный подход к задаче максимизации робастной полезности заключается в рассмотрении дуальной оптимизационной задачи

$$v(y) := \inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q},\, \mathsf{R}\in\mathscr{R}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V(y d\mathsf{R}/d\mathsf{Q}), \tag{1}$$

где $\mathscr{R} := \{\mathsf{R} \ll \mathsf{P} \colon \mathsf{E}_{\mathsf{R}}\xi \le 0 \ \forall \xi \in \mathcal{A}\}$ — множество “риск-нейтральных” вероятностных мер, а $V(y) := \sup_x [U(x) - xy]$. Если

$$u(x) = \inf_{y>0} [xy + v(y)], \tag{2}$$

то решение задачи максимизации полезности может быть получено следующим образом: пусть инфимум в (2) достигается на y^*, а инфимум в (1) при $y = y^*$ — на Q^* и R^*, тогда оптимальной стратегией инвестора будет та, для которой прибыль ξ^* удовлетворяет равенству $U'(x+\xi^*) = y^* d\mathsf{R}^*/d\mathsf{Q}^*$.

Если функция полезности $U(x)$ конечна для всех значений x, то равенство (2) и предложенная схема решения могут быть обоснованы при достаточно широких предположениях на $\mathcal{A}$ и $\mathscr{Q}$. Если же $U(x)$ равна $-\infty$, скажем, при отрицательных x, то можно построить контрпример уже в случае дискретного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $\mathscr{Q} = \{\mathsf{P}\}$, $U(x) = \log x$, $\mathcal{A} = \{\alpha\xi \colon \alpha \in \mathsf{R}\}$. Основное содержание доклада состоит в обсуждении того, как правильно определить дуальную задачу (1) с тем, чтобы сохранить в общем случае соотношение (2) и данную схему решения.