СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И НАКОПЛЕННОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Я.Ю.Никитин[1]

1 Обзор методов и результатов оценивания параметров диффузионных процессов

Многочисленные задачи естествознания, техники и экономики привели во второй половине XX века к стохастическим моделям, описываемым *диффузионными процессами* или стохастическими дифференциальными уравнениями. Довольно общая модель случайного процесса $X(t)$ такого вида записывается так:

$$dX(t) = c(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t),\ 0 \le t \le T,\ X(0) = X_0. \qquad (1)$$

Здесь c и σ - измеримые функции, принимающие значения в евклидовом пространстве, а W - процесс стандартного броуновского движения, или винеровский процесс. Коэффициент c чаще всего называют *сносом,* а коэффициент σ - *диффузией или волатильностью* (в экономической литературе). Волатильность описывает в первую очередь изменчивость, нестабильность процесса X.

На самом деле (1) является символической и удобной формой записи интегрального уравнения

$$X(t) = \int_0^t c(u, X(u))du + \int_0^t \sigma(u, X(u))dW(u),\ 0 \le t \le T,\ X(0) = X_0. \qquad (2)$$

[1] Работа написана при частичной поддержке гранта РФФИ 07–01–00159.

Этому уравнению, в отличие от (1), можно придать точный смысл, определив должным образом *стохастический интеграл* $\int_0^t \sigma dW$ по процессу броуновского движения. Это было впервые сделано выдающимся японским математиком К.Ито на рубеже 50-х годов прошлого века. Дело в том, что траектории броуновского движения крайне нерегулярны, в частности, недифференцируемы, и потому построить такой интеграл по образцу классических конструкций Римана и Лебега невозможно.

С этого момента началось бурное развитие стохастического анализа и, в частности, теории уравнений вида (1) и (2). Это развитие дополнительно ускорилось в последние десятилетия, когда выяснилось, что диффузионные модели удовлетворительно описывают колебания цен и процентных ставок на финансовых рынках. Постепенно оформился интересный и содержательный раздел науки на стыке математики и экономики - *стохастическая финансовая математика.* Одно из лучших на сегодняшний день руководств по этой области знаний - двухтомник А.Н.Ширяева [8].

Приведем несколько классических примеров уравнений вида (1), используемых в финансовой математике.

Пример 1. *Винеровский процесс со сносом.* Пусть в уравнении (1) $c(t, X(t)) = \mu \in R^1$, а $\sigma(t, X(t)) = \sigma > 0$. Тогда точное решение дается формулой $X(t) = X_0 + \mu t + \sigma W(t)$.

Пример 2. *Процесс Орнстейна-Уленбека.* Положим в (1)

$$c(t, X(t)) = -\mu X(t) \in R^1, \quad \sigma(t, X(t)) = \sigma > 0.$$

Тогда точное решение дается формулой

$$X(t) = X_0 \exp(-\mu t) + \sigma \int_0^t \exp(-\mu(t-s)) dW(s).$$

Пример 3. *Геометрическое броуновское движение или модель Блэка-Шоулза.* Пусть теперь в уравнении (1)

$$c(t, X(t)) = \mu X(t), \qquad \sigma(t, X(t)) = \sigma X(t).$$

Тогда точное решение дается формулой

$$X(t) = X_0 \exp\left((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W(t)\right). \tag{3}$$

Часто встречаются также несколько более сложные модели Васичека, Кокса-Ингерсолла-Росса и ряд других. Однако набор специальных уравнений, для которых можно явно построить решение типа (3), очень невелик. Кроме того, указанные модели дают только первое приближение к сложным процессам, происходящим на современных финансовых рынках.

Вернемся к модели (1). Во-первых, нас могут интересовать решения этого уравнения - их явный вид, существование, единственность, гладкость, ограниченность, аппроксимации, предельные теоремы, и другие свойства. Литература здесь огромна и насчитывает тысячи статей и десятки монографий. Выделим две из них - книги Гихмана и Скорохода [1] и Оксендаля [6]. Первая замечательна своей фундаментальностью и общностью постановок задач, но несколько устарела, тогда как вторая - наиболее популярный современный учебник, выдержавший множество изданий. На Западе популярны книги Проттера [56], Каратзаса и Шриве [46], а также Ревюза и Йора [58].

Во вторых, мы можем стремиться к моделированию траекторий решений и численному расчету их характеристик. С основными результатами, полученными в этой области, можно познакомиться, например, в книгах Клодена [48] и Кузнецова [4].

В третьих, нас может заинтересовать *статистическая* постановка задачи: как, наблюдая траекторию процесса $X(t)$ или ее значения в отдельных точках, оценить коэффициенты сноса и диффузии или как проверить те или иные гипотезы о их виде. Эти задачи чрезвычайно важны, но вместе с тем и очень трудны и относятся к области *статистики случайных процессов.* Статистическая теория интенсивно развивается, но еще не достигла той же степени зрелости и завершенности как в области изучения свойств решений. Это вполне естественно - исследование статистических вопросов всегда отстает от их вероятностных аналогов на десяток-другой лет.

Впрочем, имеется уже несколько монографий, полностью или частично посвященных статистике диффузионных процессов, например, книги Липцера и Ширяева [5], Ибрагимова и Хасьминского [3], Кутоянца [49], Боска [23] и Пракаса Рао [55].

В этом обзоре мы сосредоточимся только на задаче оценки коэффициентов модели (1) или ее разновидностей.

Первые работы по оценке коэффициентов были связаны с довольно простыми моделями. Например, в гл. 17 монографии Липцера и Ширяева [5] рассматривается модель

$$dX(t) = \theta c(X(t)) + dW(t),\ X_0 = 0,$$

и требуется оценить неизвестный вещественный параметр θ, входящий в коэффициент сноса. Процедура построения оценки нетривиальна даже здесь и опирается на теорию эквивалентности мер, порождаемых диффузионными процессами в функциональных пространствах. Удается построить оценку метода максимального правдоподобия, имеющую вид

$$\theta^*_T(X) = \int_0^T c(X(t))dX(t) / \int_0^T c^2(X(t))dt$$

и изучить ее свойства при жестких предположениях о сносе c. Аналогичная задача, но для параметрического множителя при коэффициенте диффузии, была решена Дохналом [33].

В дальнейшем задачи усложнялись, и современная теория *параметрического* оценивания коэффициентов диффузионного процесса основана на модели

$$dX(t) = c(\lambda, X(t))dt + \sigma(\theta, X(t))dW(t), X(0) = X_0, \tag{4}$$

где λ и θ - некоторые неизвестные (возможно, многомерные) параметры. Требуется оценить эти параметры при тех или иных априорных условиях на коэффициенты сноса и диффузии, построив их состоятельные и - по возможности - несмещенные и эффективные оценки. Типичными примерами такой постановки могут служить работы Кутоянца [49], Соренсена [59] и Жакода [45]. Обсуждаются и доверительные интервалы для параметров, см., например, работу Гольденберга и Шмидта [41].

Поставленная задача трудна, и ее решение зависит от многих обстоятельств - является ли процесс X эргодичным или возвратным? Какова размерность коэффициентов? Можно ли считать растущим интервал наблюдения $[0, T]$? и так далее.

Кроме того, следует различать две совершенно различные по трудности задачи - оценку параметров диффузионного процесса *по всей наблюдаемой траектории* или такую оценку лишь по *дискретным значениям* процесса в решетке точек $[0, \Delta, 2\Delta, ..., T = n\Delta]$. Вторая задача намного труднее первой, а самое главное - значительно реалистичнее в смысле приближения к фактическим данным. При ее решении появляется множество дополнительных трудностей, заставляющих усложнять модель. Например, при снятии наблюдений неизбежны аддитивные случайные ошибки и округление данных, которые следует учитывать. Примерами многочисленных работ по оценке параметров диффузионного процесса по *дискретным наблюдениям* могут служить работы Флоранс-Змиру [36], Педерсена [53] и Кесслера и Соренсена [47].

Все же все эти задачи связаны с оцениванием *конечномерного* параметра и находятся в русле мощной параметрической теории оценивания, основанной на свойстве локальной асимптотической нормальности (LAN) Ле Кама [50], [51]. Можно надеяться на выработку общего метода оценивания, являющегося развитием классического метода максимального правдоподобия, или его обобщения - метода контраста.

Несмотря на значительные технические трудности, можно ожидать в перспективе построения вполне удовлетворительных оценок параметров, состоятельных и асимптотически нормальных с оптимальной скоростью сходимости.

Ситуация кардинально меняется, если мы переходим к *непараметрической модели* и построению непараметрических оценок. В задаче (1) мы должны оценить по траектории процесса (или ее дискретным отсчетам) не конечномерные параметры λ и θ, как это было в модели (4), а целиком функции c и σ. Задача сразу становится бесконечномерной, поскольку речь идет об оценивании не векторов из R^d, а элементов функционального пространства. Основы теории непараметрического оценивания постепенно вырабатывались во второй половине XX века и впервые были изложены в монографической форме в знаменитой книге Ибрагимова и Хасьминского [3], см. также более современную книгу Цыбакова [61].

Оказалось, что для асимптотически эффективного оценивания функциональных параметров и даже функционалов от этих параметров нужны априорные сведения о функциональном классе Σ, к которому принадлежат оцениваемые функции. Этот класс не должен быть чрезмерно обширен, чаще всего в его качестве выступают подходящие шары в соболевских или бесовских пространствах гладких функций. Качество оценки измеряется здесь в минимаксном смысле, а риск оценки f_T функционального параметра θ в норме $||\cdot||$ соответствующего пространства определяется как

$$r(f_T) = \inf_{f_T} \sup_{\theta \in \Sigma} ||f_T - \theta||. \tag{5}$$

Иными словами, нас интересует качество оценивания " наихудшего" значения параметра с помощью " наилучшей возможной" оценки.

Качество оценивания определяется порядком роста величины $r(f_T)$ при $T \to \infty$. Возможны другие асимптотические постановки, например, при растущем числе дискретных наблюдений n, или " в слабом шуме" , т.е когда при стохастическом члене σdW стоит малый параметр ε, стремящийся к нулю.

Теория выработала теоретические нижние границы для рисков оценок (так называемые границы Гаека – Ле Кама), являющиеся аналогами известных границ Крамера – Рао в параметрическом оценивании. Поэтому качество предлагаемой оценки определяется порядком ее риска (5) по отношению к упомянутым границам. В последние годы строят так называемые адаптивные оценки, равномерные по предлагаемым классам Σ, но приводящие к небольшой потере в риске. Трудность подобных задач подчеркивается тем, что здесь не выработано общего метода типа метода максимума правдоподобия в конечномерном случае, который с большой вероятностью приводил бы к успеху.

В настоящее время вся эта идеология постепенно применяется для непараметрического функционального оценивания коэффициентов диффузионных процессов (примерами могут служить работы Спокойного [60], Гобе, Хоффмана и Рейсса [40], Конта, Женон-Катало и Розенхольца [28], Далаляна [31],) но еще многое предстоит сделать. Скорости роста минимаксных рисков предлагаемых оценок найдены пока лишь в сравнительно простых случаях, причем для коэффициентов диффузии они часто не совпадают с оптимальными скоростями.

Параллельно идет работа над построением и анализом более общих стохастических моделей финансовых рынков, нежели (1). Ряд экономистов считает, что броуновское движение W в этой модели должно быть заменено либо на другой гауссовский процесс, скажем, процесс Орнстейна-Уленбека, либо на негауссовский процесс с независимыми и однородными приращениями (коротко - процесс Леви), имеющий более " тяжелые" хвосты приращений, либо на гауссовский процесс дробного броуновского движения (ДБД), которому присуща " долгая память". При этом возникают большие трудности, связанные, в частности, с проблемой построения стохастического интеграла по процессу Леви или процессу ДБД, которое даже не является семимартингалом. Примеры преодоления этих трудностей можно найти в статьях Алос и Нуалара [9],Барндорффа-Нильсена [14], Барндорффа-Нильсена и Шепарда [16], [19] , [18], Карра, Гемана, Мадана и Йора [27] и других.

Другое усложнение модели связано с введением дополнительно к диффузионному процессу или даже вместо него " дискретной" скачкообразной компоненты, которая в модели рынков отражает постоянно появляющиеся и влияющие на цены акций макроэкономические и политические новости, см., например, работы Эракера, Йоханнеса и Полсона [34], Конта и Танкова [29].

В общем виде исследователи пока чаще ограничиваются " индивидуальными" теоремами о состоятельности или асимптотической нормальности предлагаемых оценок, не ставя большей частью вопрос об асимптотике минимаксного риска ввиду сложности этой задачи.

Опишем подробнее несколько типичных результатов такого типа. Рассмотрим вслед за Флоранс-Змиру (1993) диффузионную модель вида

$$dX(t) = c(t, X(t))dt + \sigma(t)dW(t), X(0) = X_0, \tag{6}$$

для простоты формул - на отрезке $[0, 1]$. Наша цель - оценить квадрат волатильности $\sigma^2(t)$ по значениям $X(t_i)$ в равноотстоящих точках $t_i = i/n, \ i = 0, ..., n$.

Пусть K - ядро, то есть любая неотрицательная функция, такая, что $\int_{R^1} K(u)du = 1$, и пусть " ширина окна" h_n такова, что $h_n \to 0$, но при этом $nh_n \to \infty, \ n \to \infty$. Для оценки $\sigma^2(t)$ предлагается так называемая ядерная оценка Надарая-Ватсона, разработанная в 70-х годах XX века при оценке функции регрессии. Она имеет вид

$$S_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} K(h_n^{-1}(X_{t_i} - t))[X_{t_{i+1}} - X_{t_i}]^2}{n \sum_{i=1}^{n-1} K(h_n^{-1}(X_{t_i} - t))}.$$

Например, можно взять

$$K(h_n^{-1}(X_{t_i} - t)) = \mathbf{1}_{\left(X_{t_i} - t \leq h_n\right)}.$$

Следующее утверждение доказано в работе Флоранс-Змиру [36].

Теорема. Пусть волатильность в модели (6) имеет три непрерывные и ограниченные производные и равномерно отделена от нуля и бесконечности, а функция сноса c ограничена и дважды дифференцируема. Если предположить, что $nh_n^3 \to 0, \ n \to \infty$, то справедлива сходимость по распределению

$$\sqrt{nh_n}\left(\frac{S_n(t)}{\sigma^2(t)} - 1\right) \ \to L_t^{-1/2}\xi, \tag{7}$$

где ξ - стандартная нормальная случайная величина, независимая от L, в то время как

$$L_t := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 \mathbf{1}_{(|X(s) - t| < \varepsilon)} ds.$$

Мы видим, что формулировка сложна и накладывает жесткие априорные условия на коэффициенты модели. Более того, в предельном соотношении (7) фигурирует случайная величина L_t, имеющая смысл локального времени процесса X в точке t. Ее распределение неизвестно, и в свою очередь подлежит оценке. Кроме того, как отмечается в работе Хоффмана [43], эта оценка неоптимальна с точки зрения минимаксного подхода. Следует также подчеркнуть, что предложенные оценки не работают для более общей модели

$$dX(t) = c(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), X(0) = X_0. \tag{8}$$

Ряд авторов предлагает вэйвлет-оценки для волатильности. Результаты здесь формулируются также при жестких априорных ограничениях, см., например, статьи и книги Женон-Катало [37], Капобьянко [26] и Видаковича [62].

Другие результаты о непараметрическом оценивании волатильности в этих и близких моделях содержатся в работах Цигельмана [67], ван Эса, Спрея и ван Зантена [35], Хердле и Цыбакова [42], Баруччи, Малльявена и Манчино [21], Броуди, Дитемпла, Гизелса и Торреса [25], Андерсена, Боллерслева, Дибольда и Лабиса [11], [12].

Обратимся к одной частной задаче функционального оценивания, а именно к задаче оценивания "накопленной", интегрированной или интегральной волатильности. Мы не будем стремиться к исчерпывающему решению задачи, но обсудим различные подходы и имеющиеся результаты.

2 Оценка интегральной волатильности

В эконометрике и финансовой математике интегральной или накопленной волатильностью принято называть функцию $t \to \int_0^t \sigma^2(s)ds$. Ее появление в связи с моделью (1) совершенно естественно, поскольку это просто дисперсия стохастического члена $\mathbf{E}\left(\int_0^t \sigma(s)dW(s)\right)^2$. Интегральная волатильность часто возникает в различных финансовых задачах, а ее оценка представляет собой актуальную проблему.

Интересный метод оценки интегральной волатильности основан на методе Фурье и недавно предложен Мальявеном и его учениками [21], [52],[22]. Вэйвлет-оценки изучались в работе Хога и Лунде [44], а также статье Пинейро, Эль Даша и Хотта [54].

В литературе часто предлагается оценивать интегральную волатильность посредством эмпирической, или реальной волатильности (realized volatility) наблюдаемого процесса X. Речь идет о величине

$$RV_n(X)(t) = \sum_{i=0}^{[nt]} (X(t_{i+1}) - X(t_i))^2, 0 \leq t \leq 1, \tag{9}$$

при подходящем разбиении интервала $[0, 1]$.

Наряду с этим для процессов, являющихся квадратично интегрируемыми семимартингалами, обычно рассматривают и так называемую (опциональную) квадратическую вариацию

$$QV(X)(t) := [X, X](t) = X^2(t) - 2\int_0^t X(s-)dX(s), \tag{10}$$

которая для непрерывных процессов X совпадает с предсказуемой квадратической вариацией $\langle X, X\rangle(t)$. Последнюю часто называют также квадратической характеристикой или компенсатором.

Специалисты считают известным, что по вероятности

$$RV_n(X)(t) \to \langle X, X\rangle(t),\ n \to \infty.$$

Однако найти точную формулировку и ее доказательство нелегко. Впервые эта идея в применении к финансам была, по-видимому, высказана Андерсеном и Боллерслевом [10], затем она обсуждалась Барндорффом - Нильсеном и его соавторами в [15], [16], Хогом и Лунде [44], Андерсеном и Боллерслевом [11], Вернер [63], [64], Коркуэра, Нуаларом и Вернер [30], Детте, Подольским и Веттером [32], Жангом [65] и многими другими.

Обсуждаемое утверждение верно для любых семимартингалов, см. двухтомник Жакода и Ширяева [7], гл. I, теорема 4.47, а также книгу Проттера [56], теорема 22. Однако доказательства в этих источниках очень трудны и опираются на предыдущую теорию. Хотелось бы найти замкнутое и простое доказательство.

Вообще, современная математическая теория финансов базируется на теории семимартингалов и считает, что в рассматриваемых моделях

$$X(t) = \alpha(t) + m(t),\ \ \alpha(0) = m(0) = 0, \tag{11}$$

где предполагается, что процесс $\alpha(t)$, снос, - это процесс с *локально ограниченными по вариации* траекториями, а $m(t)$ - локальный мартингал. Более того, часто предполагают даже, что $\alpha(t)$ - предсказуемый процесс, например, детерминированный процесс или *càdlàg* процесс, а тогда $X(t)$ называют специальным (special) семимартингалом. Бэк [13] приводит аргументы, почему для экономических исследований разумно ограничиться именно этим классом. В рамках этого класса разложение (11) единственно.

Ниже дается строгое доказательство сходимости для простейшей модели диффузионных процессов (1) и (2), а именно для модели геометрического броуновского движения, важность которой в финансовой математике общеизвестна. Рассмотрим стохастическое уравнение для процесса X:

$$dX(t) = c(t)X(t)\ dt + \sigma(t)X(t)\ dW(t),\ \ 0 \le t \le 1, \tag{12}$$

где W - процесс стандартного броуновского движения, а коэффициенты c и σ для простоты непрерывны.

Решением (12), как известно, является процесс

$$X(t) = X_0 \exp\left(\int_0^t (c(s) - \frac{1}{2}\ \sigma^2(s))ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s)\right),$$

см., например, Оксендаль [6], с. 338-339.

Мы можем считать, что X_0 нам известно. Обозначим

$$X(t)/X_0 := \exp\left(Z(t)\right),$$

так что $\ln[X(t)/X(0)] = Z(t)$, где процесс Z допускает стохастический дифференциал

$$dZ(t) = (c(t) - \frac{1}{2}\ \sigma^2(t))dt + \sigma(t)dW(t)$$

снова с непрерывными коэффициентами.

Итак, с помощью простого логарифмического преобразования мы перешли от исходного процесса X к более простому процессу Z, работать с которым проще. Далее для простоты обозначим $a(t) := c(t) - \frac{1}{2}\ \sigma^2(t)$. Таким образом, наш процесс Z имеет стохастический дифференциал

$$dZ(t) = a(t)dt + \sigma(t)dW(t). \tag{13}$$

Разобьем интервал $[0, 1]$ на n частей точками деления $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = 1$. Будем предполагать, что ранг разбиения стремится с ростом n к нулю, т.е. $\max_{0 \le i \le n-1}\ |t_{i+1} - t_i| \to 0,$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим *эмпирическую волатильность* процесса Z, а именно

$$RV_n(Z)(s) = \sum_{i=0}^{[ns]} (Z(t_{i+1}) - Z(t_i))^2,\ 0 < s \le 1. \tag{14}$$

Эта оценка элементарно строится по траектории "логарифмического" процесса Z.

Наша цель - показать, что при любом $s \in [0,1]$ имеет место сходимость в среднем квадратичном, а следовательно и по вероятности

$$RV_n(Z)(s) \to \int_0^s \sigma^2(u)du, \ n \to \infty.$$

Иными словами, - эмпирическая волатильность - *состоятельная оценка* интегральной волатильности.

Чтобы доказать это, начнем с вычисления квадратов скобок. Имеем при каждом $i = 0, \ldots, n$

$$(Z(t_{i+1}) - Z(t_i))^2 = (\int_{t_i}^{t_{i+1}} a(u)du + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(u) \ dW(u))^2 =$$

$$= (\int_{t_i}^{t_{i+1}} a(u)du)^2 + (\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(u)dW(u))^2 + 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} a(u)du \cdot \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(u)dW(u).$$

Суммируя, получаем

$$RV_n(s) = \sum_{i \le [ns]-1} (\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(u) \ dW(u))^2 + \sum_{i \le [ns]-1} (\int_{t_i}^{t_{i+1}} a(u)du)^2$$
$$+ 2 \sum_{i \le [ns]-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} a(u)du \cdot \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(u)dW(u) := T_1 + T_2 + T_3.$$

Покажем, что вторым и третьим членом можно пренебречь при неограниченном измельчении разбиения. Обозначим для краткости

$$\Delta_n := \max_{0 \le i \le n-1} |t_{i+1} - t_i|.$$

Если $|a| \le K_1, |\sigma| \le K_2$, то

$$T_2 \le K_1^2 \sum_{i \le [ns]-1} |t_{i+1} - t_i|^2 \le K_1^2 \Delta_n \to 0.$$

Третий член стохастический, но стремится к нулю по вероятности. Действительно, по неравенству Чебышева при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$P(|T_3| > \varepsilon) \le \varepsilon^{-2}\mathbf{E}T_3^2 \le \varepsilon^{-2}2K_1^2\Delta_n^2 \cdot \sum_{i \le [ns]-1} \mathbf{E}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(u)dW(u)\right)^2 \le$$

$$\le \varepsilon^{-2}2K_1^2\Delta_n^2 \sum_{i \le [ns]-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(u)du \le 2\varepsilon^{-2}K_1^2K_2^2T\Delta_n^2 \to 0, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Остается первый член, который вносит главный вклад. Надо доказать стремление по вероятности

$$T_1 \to \int_0^s \sigma^2(u)du.$$

Это можно сделать непосредственно, доказывая сходимость в среднем квадратичном (из которой следует сходимость по вероятности). Для этого нужны утомительные и кропотливые оценки четвертых степеней стохастических интегралов. Проще сослаться на уже известный результат, что мы и сделаем.

Хорошо известно (Оксендаль [6], Каратцас и Шриве [46]), что стохастический интеграл

$$I(t) := \int_0^t \sigma(u)dW(u)$$

- это *квадратично интегрируемый мартингал* по отношению к естественной фильтрации, порожденной винеровским процессом. Квадратическая вариация, порожденная процессом $I(t)$, в точке s - это как раз и есть величина T_1. Но квадратическая вариация квадратично интегрируемого мартингала сходится при измельчении разбиения к его *квадратической характеристике* $\langle\, I, I\, \rangle$ (это уже довольно простой факт, см. книгу Каратцаса и Шриве [46], гл.I, теорему 5.8 на с.32.)

Остается понять, что квадратическая характеристика $\langle I, I\rangle$ - это и есть накопленная волатильность. Надо выделить мартингальную часть из субмартингала $I^2(t)$, тогда остаток и даст требуемое (по единственности разложения Дуба-Мейера для субмартингалов.) Пусть $\{\mathcal{F}_u\}_{(0\le u\le t)}$ - естественная фильтрация W. Тогда при $t > u$ по правилам вычисления стохастических интегралов получаем

$$\mathbf{E}(I^2(t)|\mathcal{F}_u) = I^2(u) + 2I(u)\mathbf{E}(I(t) - I(u)|\mathcal{F}_u) + \mathbf{E}((I(t) - I(u))^2|\mathcal{F}_u) = \\ = I^2(u) + \int_u^t \sigma^2(x)dx,$$

что можно переписать в виде

$$\mathbf{E}(I^2(t) - \int_0^t \sigma^2(x)dx|\mathcal{F}_u) = I^2(u) - \int_0^u \sigma^2(u)du.$$

Тем самым мы доказали, что процесс $I^2(t) - \int_0^t \sigma^2(x)dx$ действительно мартингал.

Таким образом, $I^2(t)$ раскладывается на мартингал $I^2(t) - \int_0^t \sigma^2(x)dx$ и квадратическую характеристику $\langle\ I, I\ \rangle(t) = \int_0^t \sigma^2(x)dx$.

Процедура оценки интегральной волатильности через эмпирическую волатильность представляется разумной и, по-видимому, общепринятой техникой, на которую имеется множество ссылок в эконометрических работах.

Попробуем несколько обобщить нашу оценку и рассмотрим для процесса Z так называемую *взвешенную степенную* вариацию, то есть вместо (9) величину

$$V_n^p(s;\tau,\gamma) = \sum_{i=0}^{[ns]} \tau_{i,n}^{\gamma}|Z(t_{i+1}) - Z(t_i)|^p.$$

Здесь $\tau_{i,n} = |t_{i+1} - t_i|,\ p > 0$ и $\gamma \in R^1$. Предположим сначала, что весов нет, т.е. $\gamma = 0$. Тогда, см., например, работы Вёрнер [63], [64], [30], пользы от V_n^p немного, потому что $V_n^p \to \infty$ при $0 < p < 2$ и $V_n^p \to 0$ при $p > 2$ по вероятности.

Ситуация неожиданно меняется при введении весов $\tau_{i,n}$. При слабых дополнительных условиях оказывается, что при $p > 0$

$$V_n^p(s;\tau, 1-p/2) \to \mu_p \int_0^s \sigma^p(u)du, \tag{15}$$

где $\mu_p = 2^{p/2}\Gamma(\frac{p+1}{2})/\sqrt{\pi}$. Этот результат при $p = 2$ переходит в доказанный выше, а при других p позволяет оценить накопленную волатильность p-го порядка, то есть интеграл в правой части (15).

Вернемся к поведению V_n^p. Оказывается, что дело можно исправить нормировкой. В частности, Барндорффом-Нильсеном и Шепардом доказано в [16] (при некоторых сильных дополнительных предположениях типа независимости c и σ от W), что

$$\frac{n}{3}\sum_{i=0}^{n} |Z(t_{i+1}) - Z(t_i)|^4 \to \int_0^1 \sigma^4(s)ds. \tag{16}$$

Однако состоятельность оценки - это очень слабое свойство, которое ничего не говорит о скорости сходимости оценки к оцениваемому параметру и об ее асимптотической дисперсии. Поэтому следующим этапом при рассмотрении эмпирической волатильности является доказательство ее асимптотической нормальности. Рассмотрим результат, доказанный недавно Барндорффом-Нильсеном и Шепардом в [17]: при тех же предположениях, что и (16), справедливо соотношение

$$\frac{\sum_{i=0}^n |Z(t_{i+1}) - Z(t_i)|^2 - \int_0^1 \sigma^2(s)ds}{\sqrt{\frac{2}{3}\sum_{i=0}^n |Z(t_{i+1}) - Z(t_i)|^4}} \longrightarrow N(0,1) \text{ по распределению} \tag{17}$$

или, вследствие (16) и по теореме Слуцкого,

$$\frac{\sqrt{n}\left(\sum_{i=0}^n |Z(t_{i+1}) - Z(t_i)|^2 - \int_0^1 \sigma^2(s)ds\right)}{\sqrt{2\int_0^1 \sigma^4(s)ds}} \longrightarrow N(0,1). \tag{18}$$

Это означает, в частности, что эмпирическая волатильность есть $\sqrt{n}$–состоятельная оценка интегральной волатильности. Качество этой оценки зависит от 4-го момента наблюдений $Z(t_{i+1}) - Z(t_i)$. Если он бесконечен, то оценка несостоятельна, это хорошо согласуется с результатами экспериментов по методу Монте-Карло в работе Бая, Рассела и Тьяо [24].

Серия интересных работ по оцениванию накопленной волатильности принадлежит Л.Жангу в соавторстве с П.Мюкландом и Я.Аит - Сахалиа.

Главная мысль, лежащая в основе этих работ, заключается в том, что наблюдаемые отсчеты процесса цен $X(t_i)$ фактически наблюдаются с шумом, который возникает как из ошибок измерения, так и из рыночных микроструктурных эффектов, в частности, разницы между ценой продавца и покупателя (bid-ask spread). Таким образом, мы фактически наблюдаем значения

$$Y(t_i) = X(t_i) + \varepsilon_{t_i},$$

где процесс X ненаблюдаем, а ε_{t_i} - независимые шумы с нулевым средним и конечной дисперсией, не зависящие от процесса X. Для зашумленных наблюдений ситуация резко меняется, и эмпирическая волатильность *перестает быть состоятельной оценкой интегральной волатильности.*

Действительно, Жанг, Мюкланд и Аит-Сахалия [66] простым подсчетом показали, что

$$\sum_{i=0}^{n}(Y(t_{i+1}) - Y(t_i))^2 = \sum_{i=0}^{n}(X(t_{i+1}) - X(t_i))^2 + 2nE\varepsilon^2 + O(\sqrt{n}),\ n \to \infty.$$

Чем чаще мы будем делать отсчеты, т.е. увеличивать n, тем хуже будет оценка из-за огромного смещения.

Таким образом, эмпирическая волатильность оценивает совсем не то, что мы хотим, а скорее дисперсию шумов. Действительно, если поделить обе части последнего равенства на n, то получим

$$\lim_n (2n)^{-1} \sum_{i=0}^{n} (Y(t_{i+1}) - Y(t_i))^2 = E\varepsilon^2. \tag{19}$$

Из (19) следует, кстати, что дисперсия шумов состоятельно оценивается посредством

$$(2n)^{-1} \sum_{i=0}^{n} (Y(t_{i+1}) - Y(t_i))^2 := \frac{1}{2n}[Y, Y]^{(all)}.$$

Это понадобится нам ниже.

Вместе с тем, финансисты и трейдеры прекрасно знают, что снимать данные о ценах, скажем, каждую секунду, хотя это и возможно технически, неразумно, и никогда так не поступают. Они это делают не чаще, чем раз в 5 минут, то есть в 300 раз реже, чем возможно. Это подтверждается и рядом графиков, где оценка волатильности явно становится хуже в зависимости от частоты отсчетов (см. Рис.1 ниже.)

Жанг и Мюкланд считают, что во всем виноваты шумы, поскольку при их наличии модель дает не чистый семимартингал, а скорее "скрытый, зашумленный семимартингал ".

Появляется следующее противоречие: с одной стороны, частое снятие данных увеличивает роль шумов, с другой стороны, законы статистики запрещают выбрасывать 299 наблюдений из каждых 300 (за 5 минут наблюдений) при редкой регистрации процесса.

Возникает вопрос: а как же распорядиться выбрасываемыми наблюдениями и содержащейся в них информацией?

Поступим так: разделим сетку точек $\mathcal{G} = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ на K непересекающихся подсеток вида $\mathcal{G}^{(k)}$ вида $(t_{k-1}, t_{k-1+K}, \ldots, t_{k-1+n_k K}$. Здесь n_k - число элементов сетки. Обозначим через t_{j+} - элемент сетки, следующий за t_j. Тогда разумно вычислить набор "редких"эмпирических

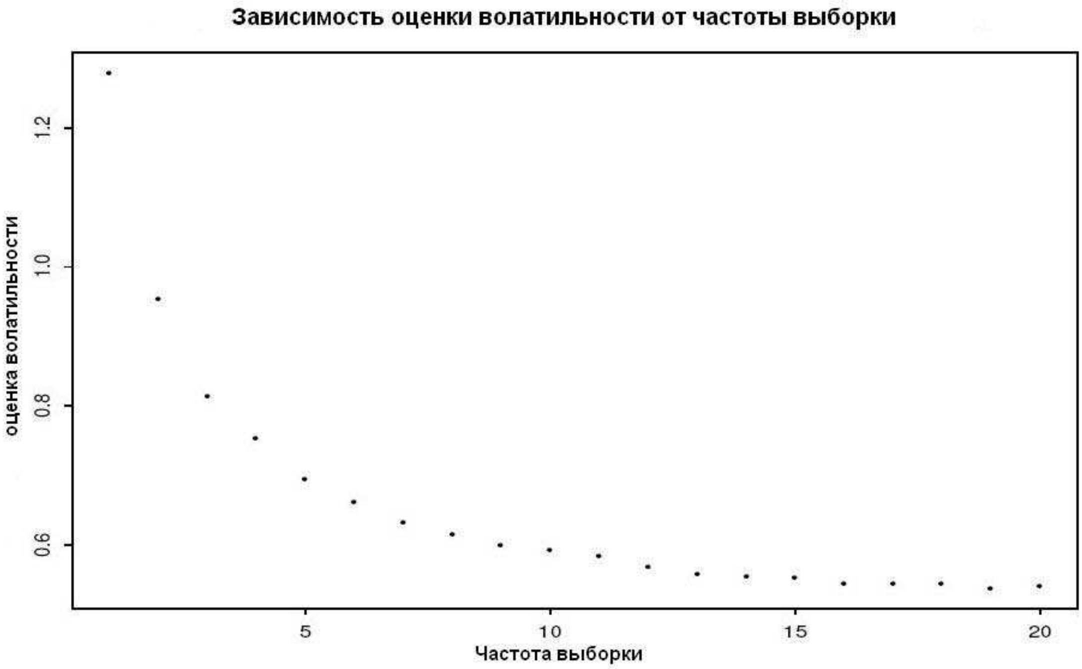

Рис. 1: График реальной волатильности для Алюминиевой промышленной компании г.Алкоа США за 4 января 2001 года. Данные из базы данных TAQ. В этот день осуществлено 2011 сделок, в среднем одна каждые 13.365 секунд. "Частота =1" - волатильность при использовании всех данных, "Частота=2" - при использовании каждой второй точки данных и т.д. Использовалась усредненная реальная волатильность, которая описана в [66].

волатильностей по подсеткам

$$[Y,Y]^{(k)} = \sum_{t_i, t_{i+} \in \mathcal{G}^{(k)}} (Y(t_{i+}) - Y(t_i))^2,$$

а затем взять их **усреднение**

$$[Y,Y]^{(avg)} = K^{-1} \sum_{k=1}^{K} [Y,Y]^{(k)}.$$

Ясно, что усреднение, как обычно в статистике, уменьшает дисперсию. Число K может зависеть от n, но $n/K \to \infty$. Типичный выбор - это $K = O(n^{2/3})$.

Кроме борьбы с шумами, не следует забывать об ошибке при дискретизации, когда мы заменяем эмпирической волатильностью истинную интегральную волатильность. С учетом всего этого, предлагается скомбинировать две временные шкалы (all) и (avg), рассматривая оценку

$$\langle X, X \rangle_{n,K} := [Y, Y]^{(avg)} - \frac{n - K + 1}{n} [Y, Y]^{(all)}. \tag{20}$$

Теорема [66]. Предположим, что X - процесс Ито и выполнены некоторые слабые условия регулярности на сетки, шумы и коэффициенты. Пусть, кроме того,$K = n^{2/3}$. Тогда
а)$\langle X, X \rangle_{n,K}$ состоятельная оценка интегральной волатильности
б) $\langle X, X \rangle_{n,K}$ асимптотически нормальная ее оценка, более точно имеет место сходимость по распределению

$$n^{1/6} \Big(\langle X, X \rangle_{n,K} - \langle X, X \rangle \Big) \longrightarrow N(0, \tau^2), \tag{21}$$

где асимптотическая дисперсия τ^2 имеет сложное выражение в терминах модели.

Как оказалось, это промежуточный результат, который можно улучшить, вводя не две, а несколько шкал. При этом получается оценка сходимости не $O(n^{1/6})$, как в (21), а неулучшаемая скорость $O(n^{1/4})$. Соответствующий результат был получен Жангом в [65] через пару лет после [66].

При этом вместо двушкальной эмпирической волатильности (20) он рассматривает **мультишкальную** эмпирическую волатильность

$$\langle X, X \rangle_{n,K_1,\dots,K_M} := \sum_{i=1}^{M} \alpha_i [Y, Y]_{n,K_i}, \tag{22}$$

где $M > 2, K_1, ..., K_M$ определяют M шкал, а α_i - тщательно и нетривиально подобранные числовые коэффициенты. Оценка (22) вычисляется довольно сложно, зато она не только состоятельна, но и асимптотически нормальна с оптимальной скоростью.

Для формулировки результатов Жанга нужна некоторая подготовка.

Во-первых, определим характеристику регулярности разбиения отрезка [0,1] - асимптотическую квадратичную вариацию времени (AQVT) $H(t)$ как

$$H(t) = \lim_{n\to\infty} n \sum_{t_{n,i}\leq t} (t_{n,i} - t_{n,i-1})^2. \tag{23}$$

Скажем, при равномерном разбиении $H(t) = t$. Мы потребуем, чтобы функция H имела производную H' и что $\min_{0\leq t\leq 1} H'(t) > 0$. Все это - слабые ограничения.

Определим важную для дальнейшего величину, зависящую от $\sigma(t)$:

$$\eta = \left(\int_0^1 H'(t)\sigma^4(t)dt\right)^{1/2} > 0.$$

Далее, предположим, что $M_n/\sqrt{n} \to c > 0$, $n \to \infty$.

Коэффициенты $\alpha_{n,i}$ можно выбирать многими способами, простейший выбор таков:

$$\alpha_{n,i} = \frac{12i(i/M_n - 1/2 - 1/(2M_n)}{M_n^2 - 1} \sim C\frac{i^2}{n^3},$$

так что $\sum_i \alpha_{n,i} = 1$.

При таком выборе коэффициентов введем связанную с этим выбором величину

$$\nu^2 := 48c^{-3}(E\varepsilon^2)^2 + \frac{52}{35}c\eta^2 + \frac{12}{5c}D\varepsilon^2 + \frac{48}{5c}\langle X, X\rangle E\varepsilon^2 > 0.$$

В указанных обозначениях справедлива

Теорема *(Жанг, [65]). Пусть коэффициенты процесса X непрерывны и пусть $\sigma > d^2 > 0$. Предположим, что шумы ε_i независимы и одинаково распределены, причем $E\varepsilon = 0$, $E\varepsilon^4 < \infty$. Пусть разбиение отрезка [0,1] таково, что выполнено (23), причем*

$$\max_{0 \le i \le n} |t_{n+1,i} - t_{n,i}| = O\ (\frac{1}{n}).$$

При слабых дополнительных предположениях на исходный процесс справедливо соотношение

$$n^{1/4} \frac{\langle X, X \rangle_{n,K_1,\ldots,K_M} - \langle X, X \rangle}{\nu} \longrightarrow N(0,1), \tag{24}$$

где сходимость понимается "stably in law"по Реньи [57].

Недостатком этой теоремы является то, что нормирующий множитель $\nu > 0$ зависит от неизвестных величин $\int_0^1 H'(t)\sigma^4(t)dt$ и $\langle X, X \rangle$, которые, впрочем, *можно оценить.* В результате получится возможность получить доверительный интервал для интегральной волатильности в фиксированной точке с заданной надежностью типа

$$P(-d_\alpha T_n + \langle X, X \rangle_{n,K_1,\ldots,K_M} < \langle X, X \rangle < +\langle X, X \rangle_{n,K_1,\ldots,K_M} + d_\alpha T_n) = 1 - \alpha.$$

Построив систему таких доверительных интервалов в некотором наборе точек, мы можем с помощью линейной интерполяции получить некоторое подобие *доверительной полосы* для интегральной волатильности.

Глотер и Жакод рассматривали в [38, 39] параметрические оценки волатильности в случае исходного марковского процесса (т.е. когда коэффициенты и σ зависят от случая только через сам процесс: $c(t, \theta, \omega) = c(t, X(t, \theta, \omega)$. В этом случае они установили точную скорость сходимости $O(n^{1/4})$. Стало быть, и в теореме Жанга лучшая скорость невозможна!

Эта скорость не так плоха, как может показаться, поскольку n может быть очень большим.

Под влиянием работ Жанга, Мюкланда и Аит-Сахалия в последнее время стали появляться исследования оценок накопленной волатильности ядерного типа, также учитывающих наличие шумов, см.,например, [20].

Оригинальный подход к оценке накопленной волатильности, использующий теорию некорректных задач, развит в недавней работе [2].

В задаче об оценке накопленной волатильности еще многое предстоит сделать и понять.

Список литературы

[1] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982.

[2] Вавилов С.А. , Ермоленко К.Ю. Управление инвестиционным портфелем на финансовых рынках в рамках подхода, альтернативного стратегии самофинансирования. Научный доклад № 4(R)-2006. СПб, НИИ менеджмента СПбГУ, 2006, 34 с.

[3] Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.

[4] Кузнецов Д.Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. Спб: Наука, 1999.

[5] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.

[6] Оксендаль Б., Стохастические дифференциальные уравнения. Москва, Мир, 2003.

[7] Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. М., Физматлит, 1994.

[8] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.1. Факты. Модели. Т.2. Теория. М.: Фазис, 1998.

[9] Alos E., Nualart D., Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion. Stochastics and Stochastics Reports 75 (2003), 129-152.

[10] Andersen, T. G. , Bollerslev, T. Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts, Intern. Economic Review 39(1998), 885-905.

[11] Andersen T., Bollerslev, T. , Diebold, F. and Labys P.. The distribution of exchange rate volatility. Journal of the American Statistical Association, 96(2001),42-55.

[12] Andersen T., Bollerslev T., Diebold F.X. and Labys P. Modelling and Forecasting Realized Volatility. Econometrica, 71(2003), 579-626.

[13] Back, K. Asset pricing for general processes. J. of Math. Economics, 20(1991), 371 - 395.

[14] Barndorff-Nielsen, O. Normal inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modelling. Scand. J. Stat. 24 (1997), 1 - 13.

[15] Barndorff-Nielsen, O., Graversen, S., Shephard, N. Power variation and stochastic volatility: a review and some new results. J. Appl. Probab. 41A(2004), Spec. Issue, 133-143.

[16] Barndorff-Nielsen O., Shephard N. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and their use in financial economics. Journ. Roy. Stat.Soc. B63(2001), 167 - 241.

[17] Barndorff-Nielsen, O.E., Shephard, N. Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models. J. R. Stat. Soc., B64 (2002), No. 2, 253-280.

[18] Barndorff-Nielsen, O., Shephard, N. Integrated OU processes and non-Gaussian OU-based stochastic volatility models. Scand. J. Stat. 30(2003), 277-296.

[19] Barndorff-Nielsen O., Shephard N. Modelling by Lévy processes for financial econometrics. In: Lévy processes - Theory and Applications, O. Barndorff-Nielsen, T.Mikosch, S.Resnick (eds). NY: Birkhauser, 283 - 318.

[20] Barndorff-Nielsen O.E., Hansen P.R., Lunde A., Shephard N. Regular and Modified Kernel-Based Estimators of Integrated Variance: The Case with Independent Noise. preprint, 2004. Доступен по адресу http://www.nuff.ox.ac.uk/economics/papers/2004/w28/RVkernel10.pdf

[21] Barucci E., Malliavin P., Mancino M. Harmonic analysis methods for nonparametric estimation of volatility: theory and applications. Akahori, Jiro (ed.) et al., Stochastic processes and applications to mathematical finance. Proceedings of the 5th Ritsumeikan international symposium, Kyoto, Japan, March 3–6, 2005. Hackensack, NJ: World Scientific, 1-34 (2006).

[22] Barucci E. , Reno R. On measuring volatility of diffusion processes with high frequency data, Economics Letters 74(2002), 371-378.

[23] Bosq D. Nonparametric Statistics for Stochastic Processes: Estimation and Prediction. Lecture Notes in statistics. NY: Springer-Verlag, 1998.

[24] Bai X., Russell J.R., and Tiao G.C. Beyond Merton's utopia: effects of non-normality and dependence on the precision of variance estimates using high-frequency financial data. Working paper, 2001. University of Chicago.

[25] Broadie M., Detemple J., Ghysels E., Torres, O. American options with stochastic dividends and volatility: A nonparametric investigation. J. Econom. 94(2000), 53-92.

[26] Capobianco E. Statistical analysis of financial volatility by wavelet shrinkage. Methodol. Comput. Appl. Probab. 1(1999), 423-443.

[27] Carr P., Geman H., Madan, D., Yor M. Stochastic volatility for Lévy processes. Math. Finance, 13(2003), 345 - 382.

[28] Comte F., Genon-Catalot V., Rosenholc Y. Adaptive nonparametric mean square estimation of the drift and of volatility of diffusion processes. Preprint, Univ. Paris-5, 2004.

[29] Cont R., Tankov, P. Financial Modelling with Jump Processes. Chapman and Hall, 2004.

[30] Corcuera J.M., Nualart D., Woerner J.H.C. Power variation of some integral fractional processes. Bernoulli 12(2006), No. 4, 713-735.

[31] Dalalyan A. Sharp adaptive estimation of the drift function for ergodic diffusions. Ann. Stat. 33(2005), 2507-2528.

[32] Dette H., Podolskij M., Vetter M. Estimation of integrated volatility in continuous-time financial models with applications to goodness-of-fit testing. Scand. J. Stat. 33(2006), No. 2, 259-278.

[33] Dohnal G. On estimating the diffusion coefficient. J.Appl. Prob. 24(1987), 105 - 114.

[34] Eraker B., Johannes M., Polson N. The Impact of Jumps in Volatility and Returns. Journ. of Finance, 58(2003), 1269 - 1300.

[35] van Es B., Spreij P., van Zanten H. Nonparametric volatility density estimation. Bernoulli 9(2003), 451-465.

[36] Florens-Zmirou D. On estimating the diffusion coefficient from discrete observations. J.Appl.Prob., 30(1993), 790-804.

[37] Genon-Catalot V., Laredo C., Picard D. Nonparametric estimation the diffusion coefficient by wavelet methods. Scand. J. Statist. 19(1992), 317 - 335.

[38] Gloter A., Jacod J. Diffusions with measurement errors. I: Local asymptotic normality. ESAIM, Probab. Stat. 5 (2001), 225-242.

[39] Gloter A., Jacod J. Diffusions with measurement errors. II: Optimal estimators. ESAIM, Probab. Stat. 5(2001), 243-260.

[40] Gobet E., Hoffmann M., and Reiss M. Nonparametric estimation of scalar diffusions based on low frequency data. Ann. Statist. 32(2004), 2223-2253.

[41] Goldenberg D., Schmidt R. On Estimating the Expected Rate of Return in Diffusion Price Models with Application to Estimating the Expected

Return on the Market. Journ. of Financial and Quantit. Analysis, 31(1996), 605-631.

[42] Haerdle W., Tsybakov A. Local polynomial estimators of the volatility function in nonparametric autoregression. J. Econom. 81(1997), 223-242.

[43] Hoffmann M. L_p estimation of the diffusion coefficient. Bernoulli, 5(1999), N 3, 447 - 482.

[44] Hog E., Lunde A. Wavelet estimation of integratred volatility. Computing in Economics and Finance 274(2003), Society for Computational Economics.

[45] Jacod J. Parametric inference for discretely observed non-ergodic diffusions. Bernoulli, 12(2006), 383 - 402.

[46] Karatzas I., Shreve S.E. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag, 1991.

[47] Kessler M., Soerensen M. Estimating equations based on eigenfunctions for a discretely observed diffusion process. Bernoulli, 5(1999), 299 - 314.

[48] Kloeden P.E., Platen E. Numerical solutions of stochastic differential equations. NY: Springer, 1992.

[49] Kutoyants Yu.A. Statistical Inference for Ergodic Diffusions. London: Springer - Verlag, 2004.

[50] Le Cam L. Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory. Springer Verlag, Berlin , 1986.

[51] Le Cam L., Yang G.L. Asymptotics in Statistics: some Basic Concepts. Springer Verlag, Berlin, 1990.

[52] Malliavin P., Mancino M. Fourier series method for measurement of multivariate volatilities, Finance and Stochastics 6(2002), 49-61.

[53] Pedersen A.R. A new approach to maximum likelihood estimation for stochastic differential equations based on discrete observations. Scand. J. Statistics. 22(1995), 55 - 71.

[54] Pinheiro A., El-Dash N., Hotta L. Nonparametric Volatility Estimation in Continuous Time. Brazilian Journal of Probability and Statistics 20(2006), N 2, 111 - 132.

[55] Prakasa Rao, B.L.S. Statistical Inference for Diffusion Type Processes. London: Arnold, 1999.

[56] Protter Ph.E. Stochastic Integration and Differential Equations. 2 nd Ed. Springer, 2004.

[57] Rényi A. On Stable Sequences of Events, *Sankhyā*, Ser. A, 25(1963), 293-302.

[58] Revuz D., Yor M. Continuous martingales and Brownian motion. 3rd ed. Berlin: Springer, 2005.

[59] Sorensen M. Prediction-based estimation functions. Econometrics Journal, 3(2000), 123 - 147.

[60] Spokoiny V.G. Adaptive drift estimation for nonparametric diffusion model. Ann. Statist. 28(2000), 815-836.

[61] Tsybakov A. Introduction to nonparametric estimation. Paris: Springer, 2004.

[62] Vidakovic B. Statistical Modeling by Wavelets. Wiley, 1999.

[63] Woerner J. Variational sums and power variation: a unifying approach to model selection and estimating in semimartingale models. Statistics and Decisions, 21(2003), 47-68.

[64] Woerner J. Estimation of integrated volatility in stochastic volatility models. Appl. Stoch. Models Bus. Ind. 21(2005), No. 1, 27-44.

[65] Zhang L. Efficient estimation of stochastic volatility using noisy observations: a multi-scale approach. Bernoulli 12(2006), N 6, 1019 - 1044.

[66] Zhang L., Mykland P.A., Ait-Sakhalia Y. A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noisy high-frequency data. Journ. Amer. Stat. Ass. 100(2005), N 472, 1394 - 1411.

[67] Ziegelmann, F. Nonparametric estimation of volatility functions: The local exponential estimator. Econom. Theory 18(2002), 985-991.