Санкт-Петербургский государственный университет
Научно-исследовательский институт менеджмента

НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ

Н. А. Зенкевич, Л. А. Петросян

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ В МЕНЕДЖМЕНТЕ

№ 38(R)–2006

Санкт-Петербург
2006

Н. А. Зенкевич, Л. А. Петросян. Дифференциальные игры в менеджменте. Научные доклады № 38(R)–2006. СПб.: НИИ менеджмента СПбГУ, 2006.

Использование результатов теории дифференциальных игр оказало большое влияние в исследовании различных областей теории менеджмента. Динамический характер принятия решений, множество заинтересованных участников (игроков), различные цели (выигрыши) игроков, зависимость исхода от решений, принятых другими участниками – все это делает необходимым использовать теоретико-игровые методы и особенно методы, разработанные в теории дифференциальных игр, где рассматриваются проблемы долгосрочных социально-экономических решений. К сожалению, учебных пособий по приложениям дифференциальных игр в теории менеджмента не так много. В настоящей работе представлены различные области теории менеджмента, в которых успешно применяется теоретико-игровой подход: планирование производства в условиях конкуренции, накопление капитала, управление инновациями, управление природными ресурсами, управление рекламой, раздел рынка, модели управления продажами, распространение нового продукта, динамическое ценообразование, ценовая конкуренция при изучении затрат и спроса, модели маркетинговых каналов, механизм кооперативной рекламы и координации, динамические модели конкуренции в области исследования и разработок.

Зенкевич Николай Анатольевич — к.ф.-м.н., доцент кафедры стратегического управления факультета менеджмента, СПбГУ
zenkevich@som.pu.ru

Петросян Леон Аганесович — д.ф.-м.н. профессор, декан, зав. Кафедрой математической теории игр и статистических решений факультета прикладной математики – процессов управления, СПбГУ
spbuoasis7@peterlink.ru

St. Petersburg State University
Institute of Management

DISCUSSION PAPER

Nikolay Zenkevich, Leon Petrosjan

DIFFERENTIAL GAMES AND MANAGEMENT

38(R)–2006

Saint Petersburg
2006

Zenkevich N.A., Petrosjan L.A. Time-consistency of cooperative solutions. Discussion Paper # 38 (R)–2006. Institute of Management, Saint Petersburg State University: St. Petersburg, 2006.

The use of differential game theory has provided an important impact on research in the different fields of management science. The dynamic character of decision making, many participants (players) involved, different aims (payoffs) of the players, the dependence of outcome from decisions made by a number of participants all this makes necessary the use of game theoretic methods and specially methods developed in differential game theory when the long range decision problems in social economic networks are considered. The textbook literature dealing with management science applications of differential games is rather sparse. In this paper we present different areas of management science where recently a considerable progress in the use of game theoretic methods was made: out planning in duopoly, capital accumulation, innovation, natural resources, advertising models, market share models, sales response models, new production diffusion models, advertising goodwill models, pricing models, dynamic versus myopic pricing, price competition under cost learning, price competition under demand learning. price interactions and demand learning, models of marketing channels, cooperative advertising and coordinating mechanism, dynamic R&D and strategic behavior.

Nikolay A. Zenkevich, Associate Professor, Ph. D, Strategic Management Department, School of Management, St. Petersburg State University
zenkevich@som.pu.ru

Leon A. Petrosjan, Dean, D. Sc., Head of Mathematical Game Theory and Statistical Decision Department, School of Applied Mathematics, St. Petersburg State University
spbuoasis7@peterlink.ru

Содержание

Введение

Развитие теории дифференциальных игр послужило толчком для создания многочисленных математических моделей процессов, происходящих в различных сферах экономики, маркетинга и менеджмента. Следует особо выделить такие направления, как: планирование выпуска продукции в условиях конкуренции, инвестиции и аккумуляция капиталов, естественные и возобновляемые ресурсы, политика в области исследования разработок и инноваций. Разумеется, в настоящее время, используются лишь простейшие модели, целью которых является демонстрация существования определенных свойств и факторов, влияющих на развитие системы и конкурентную среду, факторов, которые должны учитываться при анализе конкурентных процессов в реальном мире. Рекомендации, получаемые при анализе этих моделей, могут использоваться в качестве поддержки при принятии решения менеджерами в частных и общественных организациях.

Результаты моделирования могут быть получены двумя путями: аналитическими методами, которые предлагают выражения в явном виде для оптимальных решений и численно, предлагая эффективные алгоритмы и соответствующее математическое обеспечение. Аналитические методы позволяют получать общие результаты, не конкретизируя отдельные значения параметров и функциональной зависимости. Тем не менее, эти методы дают результат в достаточно простых моделях с простой математической структурой. Сила численных методов состоит в возможности использования более сложных моделей, с большим массивом исходных данных. К сожалению, в этом случае результаты не могут быть обобщены за рамки рассматриваемых вычислительных экспериментов.

1. Планирование производства в условиях конкуренции

Рассмотрим дуополию и предположим, что производимые товары не различимы и имеют одну рыночную цену, $p(t)$. В данной модели мы будем считать, что рыночная цена непосредственно не может быть получена из статической функции спроса. Точнее говоря, эволюция рыночной цены во времени зависит от разности между текущей рыночной ценой и ценой, определяемой статической функцией спроса. Предполагаем, что статическая функция спроса имеет вид:

$$g(t) = a - [q_1(t) + q_2(t)],$$

где a – положительная постоянная и $q_i(t), i \in \{1,2\}$ – скорость роста производства фирмы i. Для рыночной цены имеем следующее уравнение

$$\dot{p}(t) = s\{a - [q_1(t) + q_2(t)] - p(t)\}; \quad p(0) = p_0 > 0 \tag{1}$$

здесь в правой части (1) s, $s \in [0,\infty)$, некоторый заданный параметр и мы видим, что скорость развития рыночной цены снижается с увеличением производства и самой цены. Доход фирмы $i \in \{1,2\}$ полагается равным $p(t)q_i(t)$.

Для простоты, мы будем предполагать, что производственные затраты обеих фирм описываются одной и той же функцией

$$C(q_i) = cq_i + \frac{1}{2}q_i^2$$

где c – положительная постоянная. Фирмы также руководствуется постоянной величиной дисконтирования $\rho > 0$.

Сформулируем задачу оптимизации для фирмы i: определить такое программное управление $q_i(\cdot) \geq 0$, которое на бесконечном промежутке времени максимизирует интегральный функционал

$$J_i(q_i(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[p(t)q_i(t) - C(q_i(t))]dt,$$

при условии, что система развивается в соответствии с динамикой (1) и $q_i(t) \geq 0$ для всех $t \geq 0$.

Таким образом, мы получили дифференциальную игру двух лиц со скалярной переменной состояния и скалярным управлением у каждого из игроков. Это линейно-квадратичная игра и здесь можно рассматривать как равновесие в программных стратегиях, так и равновесие в позиционных стратегиях. Из-за линейно-квадратичной структуры и простоты задачи, равновесные стратегии позволяют аналитическое представление. Для решения задачи в программных стратегиях, обычно используется принцип максимума Понтрягина, а для нахождения равновесия в позиционных стратегиях используется метод динамического программирования Беллмана.

Основные формулы, определяющие равновесие в программных стратегиях, приведены ниже

$$H_i(p,q_1,q_2,\lambda_i)=(p-c)q_i-\frac{1}{2}q_i^2+\lambda_i s[a-(q_1+q_2)-p]$$

$$q_i(t)>0\Rightarrow\frac{\partial H_i}{\partial q_i}=p(t)-c-q_i(t)-s\lambda_i(t)=0$$

$$\dot{\lambda}_i(t)=(\rho+s)\lambda_i(t)-q_i(t)$$

$$\dot{q}_i(t)=s[a-q_j(t)-p(t)]-(\rho+s)[p(t)-c-q_i(t)]$$

$$p_{SS}=\frac{a(2s+\rho)+2c(\rho+s)}{4s+3\rho},\quad q_{SS}=\frac{(a-c)(\rho+s)}{4s+3\rho}$$

$$p^*(t)=p_{SS}+(p_0-p_{SS})e^{-kt}$$

и основные формулы, определяющие равновесие в позиционных стратегиях, имеет вид

$$\rho V(p)=\max_{q\ge 0}\left\{(p-c)q-\frac{1}{2}q^2+V'(p)s[a-2q-p]\right\}$$

$$q(p)=\begin{Bmatrix}0\\ p-c-sV'(p)\end{Bmatrix}\text{ если } p-c-sV'(p)\begin{Bmatrix}\le\\ >\end{Bmatrix}>0$$

$$q>0:\quad \rho V(p)=(p-c)[p-c-sV'(p)]-\frac{1}{2}[p-c-sV'(p)]^2+$$
$$+sV'(p)[a-p-2(p-c-sV'(p))]$$

$$q=0:\quad \rho V(p)=sV'(p)[a-p]$$

$$q>0:\quad \rho V(p)=\frac{K}{2}p^2-Ep+G$$

$$q^*(p)=(1-sK)p+sE-c$$

$$p^*(t)=p_{SS}+(p_0-p_{SS})e^{Dt}$$

$$p_{SS}=\frac{a+2c-2sE}{3-2sK}$$

$$q=0:\quad V(p)=C(a-p)^{-\frac{\rho}{s}}$$

2. Стохастические модели конкуренции

Модель олигополии. Случай полной информации [(Зенкевич Н.А., Зятчин А.В., 2006)]. Предположим, что удельные затраты каждого игрока известны всем игрокам (общее знание). Рассмотрим линейную модель олигополии Курно ([Okuguchi K., Szidarovsky F., 1999]). В ней исследуется поведение n игроков (фирм на отраслевом рынке), стратегией которых является объем выпуска продукции в единицу времени q_i, $\sum q_j = Q$, рыночная цена единицы продукции определяется как произведение обратной функции спроса $D(Q)$ на функцию $X(t)$: $P(Q,X) = D(Q)X(t)$. Уравнение движения описывается процессом Ито: $dX = \mu X dt + \sigma X dB_t$. Выигрыш игрока i определяется функционалом:

$$J_i(t, X(t), q_i) = \int_t^T e^{-rt} q_i (P(Q,X) - C_i) dt,$$

где C_i – удельные затраты игрока (фирмы) i. Предположим, что обратная функция спроса линейна и имеет вид $D(Q) = a - bQ$.

Определим оптимальную стратегию игрока i и соответствующий ей выигрыш (прибыль). Дисконтируя выигрыш на промежутке $[0, t]$, получаем:

$$W_i(t, X(t)) = e^{-rt} V_i(t, X(t)),$$

где r – безрисковая непрерывная ставка.

Применяя принцип оптимальности Беллмана, уравнение для выигрыша игрока i имеет вид:

$$rV - V_\tau = \max_{q_i} \{\mu X V_X + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 V_{XX} + q_i (P(Q,X) - C_i)\}.$$

Решая уравнение, получаем: $q_i^* = \dfrac{a}{(n+1)b} + \dfrac{\sum C_j - (n+1)C_i}{b(n+1)X}$. Для более удобной записи уравнения Беллмана, введем обозначения: $l = \dfrac{a}{(n+1)}$, $m = \dfrac{\sum C_j - (n+1)C_i}{(n+1)}$. Тогда $q_i(P(Q(X), X) - C_i) = k_1 X + \dfrac{k_2}{X} + k_3$, где $k_1 = \dfrac{1}{b} l^2$, $k_2 = \dfrac{1}{b} m^2$, $k_3 = \dfrac{1}{b} 2lm$.

С учетом проведенной максимизации правой части, уравнение Беллмана

$$rV - V_\tau = \mu X V_X + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 V_{XX} + k_1 X + \frac{k_2}{X} + k_3.$$

Решение уравнения было найдено в явном виде: $V(\tau, X) = A(\tau)X + \dfrac{B(\tau)}{X} + L(\tau)$, $V(T, X) = 0$, где $A(\tau)$, $B(\tau)$, $L(\tau)$ – известные функции.

Случай неполной информации. Введем следующие дополнительные предположения в постановку задачи.

Частное знание. Будем считать, что игроку i известны собственные удельные затраты C_i, но неизвестны удельные затраты других игроков.

Общее знание. Будем предполагать что каждый игрок знает вид функции спроса и вид функции затрат; знает, что удельные затраты других игроков лежат интервале: $C_j \in [\underline{C}, \overline{C}]$; знает распределение затрат $p_j(C) > 0$ каждого игрока. Заметим, что в данном случае проверять X_0 на допустимость необходимо для всевозможных затрат $C_j \in [\underline{C}, \overline{C}]$ всех игроков j.

Предположим для простоты, что распределение затрат – равномерное. Тогда можно искать равновесие в классе линейных функций: $q(C) = \alpha + \beta C$.

Учитывая, что удельные затраты распределены равномерно на отрезке $[\underline{C}, \overline{C}]$, получаем среднюю ожидаемую прибыль игрока:

$$\overline{\Pi}_i = q_i(aX - bq_iX - b(n-1)\alpha X - \frac{b(n-1)\beta CX}{2} - C_i), \text{ где } C = \overline{C} + \underline{C}.$$

Из отрицательности второй производной функции выигрыша следует, что функция $\overline{\Pi}_i$ – вогнутая. Из условия первого порядка следует, что $\alpha = \dfrac{a}{b(n+1)} + \dfrac{(n-1)C}{4(n+1)bX}$, $\beta = -\dfrac{1}{2bX}$. Средний ожидаемый мгновенный выигрыш (5.1.21) принимает вид:

$$\overline{\Pi}_i^* = \frac{1}{16}\frac{(4aX + Cn - C - 2C_i - 2C_i n)^2}{bX(n+1)^2}$$

Сделав замену коэффициентов, уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана можем привести к виду из предыдущего пункта:

$$rV - V_{\tau t} = \mu X V_X + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 V_{XX} + k_1' X + \frac{k_2'}{X} + k_3'$$

Следуя рассуждениям в случае полной информации, получаем функцию выигрыша в аналитическом виде.

Усложнение класса функции затрат и функции спроса, приводит к задаче аппроксимации объёма выпуска отдельной фирмы, а также отраслевого выпуска. Тем не менее, задача может быть решена при недостатке информации об удельных затратах конкурентов, что является основным результатом статьи. Стохастичность величины X не позволяет однозначно определить выигрыш в будущем, однако существуют методы построения соответствующих оценок и математического ожидания ([Зятчин А.В., Зенкевич Н.А., 2004.]).

Приведем решение ещё одной стохастической модели кооперации в условиях загрязнения окружающей среды ([Zenkevich N.A., Zyatchin A.V., 2007]). Рассмотрим n фирм, производящих товары-субституты. Предположим, что каждая фирма выбрасывает загрязняющие вещества в атмосферу в экологически значимом регионе Ω. Уровень загрязнения в регионе Ω не должен превышать максимально допустимой концентрации (ПДК), θ. Средний уровень загрязнения атмосферы при n источниках можно приближенно определить по формуле ([Petrosjan L.A., Zakharov V.V., 1996])

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} d_i \omega_i ,$$

где ω_i – выброс игрока i, d_i – известные константы.

Стратегией игрока i является объем выпущенной продукции q_i, $\sum_{j=1}^{n} q_j = Q$. Пусть выброс ω_i пропорционален объему выпуска q_i:

$$\omega_i = \beta_i q_i \text{ и } \omega = \sum_{i=1}^{n} d_i \omega_i = \sum_{i=1}^{n} d_i \beta_i q_i .$$

В случае превышения ПДК, на каждую фирму налагается штраф $s_i > 0$. Пусть на цену продукции влияет внешний стохастический фактор x, $dx(t) = \mu(t,x)dt + \sigma(t,x)dz,\ x(0) = x_0$. Пусть функция спроса – линейная $D(Q) = a - bQ$, цена определяется как обратная функции спроса: $P(Q,x) = D(Q)x.$ Очевидно, что функция выигрыша разрывна:

$$\Pi_i(x,q) = \begin{cases} q_i((a-bQ)x - C_i), & \omega \le \theta \\ q_i((a-bQ)x - C_i) - s_i, & \omega > \theta \end{cases}$$

где C_i постоянные предельные затраты, $q = (q_1,...,q_n)$.

Рассмотрим дифференциальную игру $\Gamma(0,x_0)$, определенную множеством игроков $I = \{1,2,3,...,n\}$, стратегиями $q_i(x) \in R^k$, $i \in I$ и продолжительностью $T\ \ (T - t)$.

Пусть в $\Gamma(t,x(t))$ игрок i максимизирует интегральный выигрыш:

$$J_i(t,x(t),q) = \int_t^T g_i(\tau, x(\tau), q(x(\tau)))d\tau + h_i(T, x(T)),$$

где $q(x(\tau)) = (q_1(x(\tau)),...,q_n(x(\tau)))$.

Основные полученные результаты:

1) Рассмотрено следующее неравенство

$$\theta \ge \sum_{i=1}^{n} d_i \beta_i q_i^* =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} d_i \beta_i \left(\frac{a}{b(n+1)} + \frac{\sum C_j - (n+1)C_i}{b(n+1)x} \right) = \frac{a\sum_{i=1}^{n} d_i \beta_i}{(n+1)b} + \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i \beta_i (\sum C_j - (n+1)C_i)}{b(n+1)x}.$$

Отсюда было определено такое множество $X_0(A_2)$, $x_0 \in X_0(A_2)$ что $q^*(x(\tau)), \tau \in [0,T]$ является равновесием по Нэшу и ПДК не нарушен в равновесии с вероятностью $p = 0.95$.

2) Получено асимптотическое свойство процесса Ито: рассмотрим процесс $dx = \mu x dt + \sigma x dz$ и положительный параметр $A > 0$. Тогда $P\{x(t) \le A\} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$, если $2\mu - \sigma^2 > 0$ и $P\{x(t) \le A\} \xrightarrow[t \to \infty]{} 1$, если $2\mu - \delta^2 < 0$

3) Используя указанное асимптотическое свойство, построено оптимальное поведение социального планировщика в смысле определения политики штрафов, при которой со временем вероятность нарушения ПДК в равновесии стремиться к нулю.

3. Модель накопления капитала

Термин накопление капитала относится к целому ряду особых случаев: путем инвестиций фирмы могут накапливать физический капитал (земли, оборудование, здания), но они могут накапливать также и интеллектуальный капитал (человеческий капитал) в виде опыта своих работников, их умения, знаний и навыков. Проводя рекламные кампании, фирмы создают определенный имидж и хорошее отношение к себе среди покупателей. Это тоже можно рассматривать как накопление капитала. Во всяком случае, капитал всегда положителен. Накопление загрязняющих веществ, возникающих в экономике из-за выброса из загрязняющих источников, тоже может быть рассмотрено как в, некотором смысле, накопление капитала, но в этом случае эти накопления имеют отрицательные значения.

Рассмотрим дуополию и пусть $K_i(t)$ есть переменная состояния, представляющая накопленный капитал фирмы $i \in \{1,2\}$ к моменту t. Накопленный капитал может возрастать в результате инвестиций. Пусть управляющая переменная $I_i(t)$ обозначает скорость инвестиций фирмы i. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{K}_i(t) = I_i(t), \quad K_i(0) = K_i(t_i) = 0.$$

Предполагаем, что инвестиции удовлетворяют условию $I_i(t) \in [0, \overline{I}_i]$. Также предположим, что фирмы начинают процесс в момент 0, не имея никакого первоначального капитала и ничего не инвестируя до момента t_i. Таким образом, $K_i(t) \equiv 0$ для $t \in [0, t_i]$.

Будем также считать, что на рынок выставляется однородный продукт, рыночная цена которого равна $p(t)$ и определяется мгновенной функцией спроса $p(q)$, где $q = q_1 + q_2$ есть суммарное предложение. В отличие от предыдущего случая, цена реагирует мгновенно на изменение общего предложения.

Предположим также, что производственные мощности фирмы i ограничены $q_i(t) \le K_i(t)$. Очевидно, что равновесные размеры производства продукции должны быть функциями от накопленных капиталов. То есть мы можем использовать обозначение $q_i(K_1, K_2)$. Таким образом, общий выпуск продукции q зависит от накопленных капиталов обеих фирм, то есть $q(K_1, K_2)$.

В отличие от предыдущего примера, скорость роста производства не является управляющей переменной фирмы. В данном случае считается, что производство является просто заданной функций переменных состояния K_1, K_2. Эти переменные, в свою очередь, изменяются под влиянием управляющих переменных I_1 и I_2 соответственно.

Производственные затраты фирмы i определяются с помощью функции $C_i(q_i)$. Функция C_i предполагается дважды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет условию $C_i(0) = 0,\ \frac{\partial C_i}{\partial q_i}|_{q_i=0} = 0$.

Функционалы выигрыша фирм определены по формуле

$$J_i(q_1(\cdot), I_1(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\pi_i(K_1(t), K_2(t)) - I_i(t)]dt,$$

где

$$\pi_i(K_1, K_2) = p(q(K_1, K_2))q_i(K_1, K_2) - C_i(q_i(K_1, K_2))$$

есть мгновенный доход фирмы i на рынке. Предполагаем, что функция π_i дважды непрерывно дифференцируема, возрастающая и строго вогнута по K_i и удовлетворяет условиям

$$\pi_i(K_i, K_j)|_{K_i=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial K_i^2} < 0, \quad \frac{\partial \pi_i}{\partial K_j} < 0, \quad \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial K_i \partial K_j} < 0,$$

Исследуется вопрос существования равновесия по Нэшу в программных стратегиях. При этом структура решения имеет следующий вид

$$J_i = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\pi_i(K_1(t), K_2(t)) - \rho K_i(t)]dt$$

$$C_i(K_i(t), \bar{K}_j(t)) - \rho K_i(t)$$

$$\tilde{I}_i(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{I}_i \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ для } t \in \begin{Bmatrix} [0, t_i] \\ (t_i, T_i] \\ (T_i, \infty) \end{Bmatrix}.$$

4. Модель управления природными ресурсами

Природные ресурсы могут быть частными или могут составлять общественную собственность. Последнее, в принципе, означает, что любой может эксплуатировать эти ресурсы. Природные ресурсы могут быть невозобновляемыми, например полезные ископаемые, и возобновляемыми, например рыбные или лесные.

В данном примере мы будем рассматривать рыбные ресурсы. Пусть $x(t)$ размер (биомасса) особого вида рыбы и предположим, что этот вид вылавливается N рыбаками (странами). Скорость вылавливания $u_i(t)$ игроком i, $i = 1, 2, ..., N$, есть управляющая переменная этого игрока. Очевидно, что скорость вылавливания должна быть неотрицательной.

Уравнение движения имеет вид

$$\dot{x}(t) = G(x(t)) - \sum_{t=1}^{N} u_i(t), \quad x(0) = x_0 > 0. \tag{2}$$

В (2) функция G называется естественной функцией роста. При отсутствии какого-либо рыболовства, объем рыбы растет со скоростью $G(x(t))$ в момент t. Функция естественного роста удовлетворяет условию

$$G(0) = 0, \quad G'(0) > \rho, \quad G''(x) < 0, \quad \exists \tilde{x} > 0, \text{ такой, что } G'(\tilde{x}) = 0 \tag{3}$$

Условие (3) означает, что функция G сперва растет, достигая единственного максимума в точке $x = \tilde{x} > 0$. И существует такое значение x_M, что $G(x) < 0$ при $x > x_M$. Значение $\tilde{x}$ называется максимальным приемлемым значением для размера рыбного ресурса. Поставим предельное граничное условие

$$\lim_{t \to \infty} x(t) \geq 0$$

тогда выигрыш игрока i предполагается равным

$$J_i(u_i(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \pi_i(u_i(t))dt,$$

в котором под интегралом функция π_i убывает и строго вогнута. Предположим $\rho < 1$. Для упрощения предположим так же, что все игроки симметричны, имеют одни и те же функции полезности $\pi_1 = \pi_2 = ... = \pi_N = \pi$, поэтому мы предполагаем, что они могут использовать одно и то же управляющее воздействие $u_1 = u_2 = ... = u_N = u$.

Рассмотрим картель, целью которого является максимизация общего выигрыша, являющегося суммой выигрышей индивидуальных игроков. Выигрыш картели в данном случае оказывается равным

$$J_i(u_i(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} N\pi(u(t))dt,$$

В том случае, если игроки не кооперируются, исследуется равновесие по Нэшу в позиционных стратегиях.

Рассмотрим особый случай, когда естественный рост и функции полезности имеют следующий вид:

$$G(x) = x(1-x), \quad \pi(u) = -u^{-1}$$

Заметим, что полезность стремится к бесконечности, если скорость улова u стремится к нулю. Таким образом, никто из игроков не стремится привести рыбные ресурсы в нулевое состояние.

Приведем основные формулы для кооперативного решения

$$H = -\frac{N}{u} + \mu[x(1-x) - Nu]$$

$$u(t) > 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu(t)}}$$

$$\dot{\mu}(t) = (\rho - 1 + 2x(t))$$

$$\dot{x}(t) = x(t)[1 - x(t)] - \frac{N}{\sqrt{\mu(t)}}$$

$$x_{SS} = \frac{1-\rho}{2}; \quad \mu_{SS} = \frac{16N^2}{(1-\rho^2)^2}; \quad u_{SS} = \frac{1-\rho^2}{4N}$$

и основные формулы для равновесия по Нэшу в позиционных стратегиях

$$H_i(x_i, u_i, \mu_i) = -\frac{1}{u_i} + \mu_i\left[x(1-x) - u_i - \sum_{j=1;\ j\neq i}^{N} \varphi_j(x)\right]$$

$$u_i(t) > 0 \Rightarrow \frac{\partial H_i}{\partial u_i} = 0 \Rightarrow u_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_i(t)}}$$

$$\dot{\mu}_i(t) = \rho\mu_i(t)[1-2x(t)] + \mu_i(t)(N-1)\varphi'(x)$$

$$\dot{x} = x(t)[1-x(t)] - u_i(t) - (N-1)\varphi(x)$$

$$\dot{u}_i(t) = -\frac{u_i(t)}{2}[\rho - 1 + 2x(t) + (N-1)\varphi'(x)]$$

$$\varphi'(x) = \frac{1-\rho-2x(t)}{\frac{2x(t)[1-x(t)]}{\varphi(x)} - (N+1)}; \quad \varphi(0) = 0$$

$$\varphi(x) = \frac{1+\rho}{1+N}x, \quad x_{SS} = \frac{1-N\rho}{1+N}$$

5. Управление инновациями

Результаты инновационной деятельности фирмы обычно являются неопределенными, поэтому планирование подобной деятельности должно базироваться на стохастическом моделировании. Более того, работа в области исследования разработок зачастую проводится одновременно несколькими фирмами, поэтому здесь необходим теоретико-игровой подход. В целом ряде работ по дифференциальным играм выражается идея, что деятельность в области исследований и разработок может быть рассмотрена как некоторое соревнование, с целью оказаться первым в получении прорывных результатов (то есть получении новых технологий нового производственного процесса, новых услуг и т.д.). Ресурсы и капиталовложения, направляемые на исследования и разработки, определяют шансы фирмы на выигрыш в этом соревновании.

Рассмотрим следующую ситуацию. Имеется N конкурирующих фирм, выполняющих исследования и разработки в надежде первыми завершить и внедрить какую-нибудь особую инновацию (например, в телекоммуникационной отрасли). Ни одна из фирм не знает, сколько времени потребуется, чтобы сделать открытие. Так как вероятность успеха увеличивается с размером усилий и ресурсов, вкладываемых в исследования и разработки, мы попытаемся смоделировать данную проблему с помощью детерминированной дифференциальной игры со случайным временем остановки.

Фирма i выигрывает соревнование, если она добивается успеха раньше других фирм. Если фирма i выигрывает, она получает премию P_L. Проигравшая фирма так же получает премию $P_F \le P_L$ (заметим, что величина P_F может принимать отрицательное значение). Предположим, что премия растет (или уменьшается) во времени со скоростью r. Для простоты предположим, что $r = \rho$.

Фирма инвестирует ресурсы для накопления знаний, имеющих отношение к инновациям. Пусть $z_i(t)$ переменная состояния, которая представляет накопленные знания фирмы i к моменту t. Знания накапливаются в соответствии с уравнениями движения

$$\dot{z}_i(t) = u_i(t), \quad z_i(0) = 0. \qquad (4)$$

В (4), $u_i(t)$ есть скорость роста исследований и разработок фирмы i в момент t. Эта управляющая переменная фирмы i, которая приводит к затратам $\frac{1}{2}u_i^2(t)$ за выполнение научно-исследовательских работ со скоростью $u_i(t)$. Каждая фирма должна финансировать исследования и разработки до тех пор, пока открытие не сделано.

Пусть T_i – случайная величина, которая представляет собой момент получения инновации фирмой i и заметим, что прорывное время определяется по формуле $T = \min\{T_1, T_2, ..., T_N\}$. Если фирма i – победитель, тогда $T = T_i$. Предположим, что случайные величины $T_1, T_2, ..., T_N$ независимы и имеют непрерывное вероятностное распределение, тогда условная вероятность того, что фирма i сделала инновацию, определяется по формуле

$$\Pr(T_i \in [t, t+dt) \mid T_i \ge t) = \lambda u_i(t)dt + o(dt) \qquad (5)$$

где $o(dt)/dt \to 0$ при $dt \to 0$ равномерно по u_i, где λ есть положительная постоянная. Предположение (5) означает, что

$$\Pr(T_i > t \; \forall i) = \exp\left\{-\lambda \sum_{j=1}^{N} z_j(t)\right\},$$

что определяет вероятность того, что ни одна из фирм не совершила открытия до момента t. Вероятность того, что фирма i выиграет на отрезке времени $[t, t+dt)$ равна

$$\Pr(T_i \in [t, t+dt] \mid T_j > t \ \forall j) = \lambda u_i(t) \exp\left\{-\lambda \sum_{j=1}^{N} z_j(t)\right\} dt.$$

Обозначим

$$a_i(t) = \lambda \sum_{j=1;\ j \neq i}^{N} u_j(t).$$

Определим вероятность того, что фирма i проиграет на временном интервале $[t, t+dt)$:

$$\Pr(T_k \in [t, t+dt) \ \text{ для всех } \ k \neq i \mid T_j > t \ \forall j) =$$
$$= a_i(t) \exp\left\{-\lambda \sum_{j=1}^{N} z_j(t)\right\} dt.$$

Учитывая предыдущие формулы, можем выписать функционал выигрыша фирмы

$$J_i(u_i(\cdot)) = \int_0^T \exp\left\{-\rho t - \lambda \sum_{j=1}^{N} z_j(t)\right\} \left[\lambda u_i(t) e^{\rho t} P_L + a_i(t) e^{\rho t} P_F - \frac{1}{2} u_i^2(t)\right] dt.$$

Для получения более интересных результатов, специально рассматривался конечный временной промежуток, хотя некоторые результаты получены и на бесконечном временном интервале. Ниже мы приведем формулы для равновесия по Нэшу в позиционных стратегиях. Заметим, что игра в данном случае сформулирована как детерминированная:

$$y(t) = \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^{N} z_i(t)\right\}$$
$$\dot{y}(t) = -\lambda y(t) \sum_{i=1}^{N} u_i(t); \quad y(0) = 1$$

Равновесие в позиционных стратегиях.

$$\rho V_i(t, y) =$$
$$= \max_{u_i \geq 0} \left\{ y \left[\lambda u_i P_L + a_i P_F - e^{-\rho t} \frac{u_i^2}{2} \right] - V_i'(t, y) \lambda y \left[u_i + \sum_{j=1;\ j \neq i}^{N} \varphi_j(t, x) \right] \right\}$$

$$u_i(t,x)=\begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda e^{\rho t}[P_L-V_i'(t,y)] \end{Bmatrix} \text{ если } P_L-V_i'(t,y)\begin{Bmatrix} \le \\ > \end{Bmatrix}0$$

В программных стратегиях.

$$H_i(t,y,u_i,\mu_i)=y\left[\lambda u_i P_L+a_i P_F-e^{-\rho t}\frac{u_i^2}{2}\right]-\mu_i\lambda y\sum_{j=1}^{N}u_j$$

$$u_i(t)=\begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda e^{\rho t}[P_L-\mu_i(t)] \end{Bmatrix} \text{ если } P_L-\mu_i(t)\begin{Bmatrix} \le \\ > \end{Bmatrix}0$$

$$\dot{\mu}_i(t)=-\lambda u_i P_L-a_i P_F+e^{-\rho t}\frac{u_i^2}{2}+\mu_i y\sum_{j=1}^{N}u_j;\quad \mu_i(T)=0$$

$$u(t)=-b(t)\lambda e^{\rho t}$$

$$\mu(t)=P_L+b(t)$$

$$\dot{y}(t)=\lambda^2 N b(t)e^{\rho t}y(t)$$

$$\dot{b}(t)=-\frac{\lambda^2 e^{\rho t}}{2}[b(t)^2(2N-1)+2b(t)(1-N)(P_F-P_L)]$$

$$b(T)=-P_L$$

$$u^*(t)=\frac{2\lambda P_L(P_L-P_F)(N-1)e^{\rho t}}{(2N-1)P_L-[P_L+2(N-1)P_F]e^{m(t)}}$$

6. Простая динамическая модель конкуренции в области исследований разработок

Рассматриваются две симметричные фирмы на бесконечном отрезке времени, производящие однородный продукт и находящиеся в условиях конкуренции. Предполагается, что каждая из фирм может проводить исследования и разработки с целью развития новых технологий и таким образом, снижения затрат на производство. Считается, что, так же как и в предыдущей модели раздела 4, результаты исследования и разработок носят случайный характер. Другими словами, исследования и разработки могут быть успешными или могут провалиться на данном временном отрезке и вероятность этих событий зависит от совместных решений, проводить или не проводить исследования и разработки.

Итак, в каждый период времени, фирма i может принимать одно из двух решений $a_i \in \{0,1\}$, проводить исследования по разработке более продуктивной технологии или нет. Если исследования и разработки прошли успешно, то происходит инновация и успешная фирма получает больший доход. Предполагается, что объем знаний, обозначаемый через x, развивается во времени в зависимости от решений о проведении или нет исследований и разработок обеими фирмами.

$$x' = f(x, a_1, a_2) \tag{6}$$

где x' означает объем знаний в следующий период времени. В каждый период исследовательские проекты могут быть успешными или нет.

Предположим, что вероятность успеха, которую мы обозначим через $p(\cdot)$, зависит от объема знаний и решения о проведении или непроведении исследований и разработок обеими фирмами:

$$p(x, a_1, a_2) = P(a_1, a_2) g(x) \tag{7}$$

где g и P – неубывающие функции со значениями в множестве $[0,1]$.

Также предполагаем, что каждая из фирм несет фиксированные неотрицательные затраты на исследования и разработки в каждый заданный период. Они зависят от решений фирм и обозначаются через $c(a_i, a_j), \quad i, j \in \{1,2\}$ и $i \neq j$. В конце концов, если происходит открытие более выгодной технологии в данный период времени, то инновационный процесс заканчивается и каждая из фирм получает свои доходы в соответствии с той ситуацией, которая в данный период имеет место.

Поэтому, если фирма не вкладывает деньги в исследование технологий, она не может копировать инновации другой фирмы, то есть для того что бы использовать общее здание для внедрения в экономику, необходимо специальное вложение в каждую из фирм. Обозначим через π_n, π_b и π_s соответственно доход фирмы на всем промежуточном интервале при следующих условиях:

1. фирма не может использовать новую технологию;
2. обе фирмы могут использовать новую технологию;
3. только одна из фирм использует новую технологию;

Предполагается, что $\pi_n < \pi_b < \pi_s$.

Каждая из фирм стремится максимизировать ожидаемый доход, при условии, что движение происходит в соответствии с (6). Этот случай подпадает под определение динамической игры, потому что действие каждого из игроков влияет на будущую вероятность успеха с использованием общего доступного объема знаний.

Перейдем к более точной математической формализации. Мы здесь рассматриваем дискретную схему. Пусть $X \subseteq [0,\infty)$ есть множество всех возможных уровней знания в экономике. Обозначим через $\delta_i : X \to \{0,1\}$ для $i = 1,2$ политику фирмы i, определяющую её решения в области исследования и развития, как функцию объема знаний. Таким образом, δ_i обозначает стационарную стратегию, состоящую в использовании политики δ_i во все периоды времени и $\delta = (\delta_1, \delta_2)$. Обозначим через Δ_i множество стратегий фирмы i. Далее, обозначим через $v_j^{\delta}(x)$ ожидаемый доход фирмы j на бесконечном отрезке времени, при условии использования пары стратегии δ в начальном состоянии $x \in X$. Для фирмы 1 имеем

$$\begin{aligned}
&v_1^{\delta}(x) = \{\pi_0 - c(\delta_1(x), \delta_2(x)) + \\
&+\beta[p(\delta_1(x), \delta_2(x), x)(\pi_s \delta_1(x)(1-\delta_2(x)) + \pi_b \delta_1(x)\delta_2(x) + \pi_n(1-\delta_1(x)) + \\
&+(1 - p(\delta_1(x), \delta_2(x), x)) v_1^{\delta}(x')]\}
\end{aligned} \qquad (8)$$

где x' определяется формулой (6), p определяется формулой (7), π_0 – текущий доход в течение одного периода времени, π_n, π_b и π_s – доходы на всем интервале времени в случае, если открытие произошло, $\beta \in [0,1]$ – дискаунт фактор. В первой строчке справа в (8) записан текущий доход фирмы, минус расходы на исследовании и разработки. Следующее слагаемое в квадратных скобках показывает доходы фирмы на всем промежутке времени в случае, если открытие произошло. Третья строчка в формуле (8) показывает доходы, если открытие не произошло. Ожидаемый доход второй фирмы выписывается аналогично.

Решение ищем как стационарное равновесие по Нэшу.

Определение. Равновесие δ^* – это такая пара стратегий, для которых при всех $x \in X$ имеет место

$$\begin{aligned}
v_1^{(\delta_1^*, \delta_2^*)}(x) &\ge v_1^{(\delta_1, \delta_2^*)}(x) \text{ для всех } \delta_1 \in \Delta_1 \\
v_2^{(\delta_1^*, \delta_2^*)}(x) &\ge v_1^{(\delta_1^*, \delta_2)}(x) \text{ для всех } \delta_2 \in \Delta_2
\end{aligned}$$

Если такое равновесие существует и единственно, то обозначим через $v_j(x) = v_j^{\delta^*}(x)$ значение динамической игры для игрока j. Тогда как это следует из (8), функции значения игры, удовлетворяют рекурсивным уравнениям

$$v_1(x) = \max_{a_1 \in \{0,1\}} h_1(x, a_1, \delta_2^*(x), v_1)$$
$$\equiv \max_{a_1 \in \{0,1\}} \{\pi_0 - c(a_1, \delta_2^*(x)) +$$
$$+ \beta[p(a_1, \delta_2^*(x), x)(\pi_s a_1(1 - \delta_2^*(x)) + \pi_b a_1 \delta_2^*(x) + \pi_n(1 - a_1))$$
$$+(1 - p(a_1, \delta_2^*(x), x))v_1(x')]\}, \text{ для всех } x \in X \tag{9}$$

$$v_2(x) = \max_{a_2 \in \{0,1\}} h_2(x, a_2, \delta_1^*(x), v_2)$$
$$\equiv \max_{a_2 \in \{0,1\}} \{\pi_0 - c(a_1, \delta_1^*(x)) +$$
$$+ \beta[p(a_2, \delta_1^*(x), x)(\pi_s a_2(1 - \delta_1^*(x)) + \pi_b a_2 \delta_1^*(x) + \pi_n(1 - a_2))$$
$$+(1 - p(a_2, \delta_1^*(x), x))v_2(x')]\}, \text{ для всех } x \in X \tag{10}$$

Заметим, что если фирмы симметричны, то есть они аналогичным образом проявляются в функциях p и f, тогда

$$h_1(x, a_1, a_2, v) = h_2(x, a_2, a_1, v) \tag{11}$$

Ясно, что в этом случае, функции v_1 и v_2 будут совпадать. В этом случае индекс можно убрать из обозначения функции значения игры.

Рассмотрим некоторые подходы к численному решению задачи. Аналитическое решение уравнений (9), (10) не существует даже для самых простых функций затрат и функций вероятностей сделать открытие. Здесь можно использовать два приближенных подхода:

1. Итерация в пространстве стратегий

2. Итерация в пространстве значений игры, до нахождения неподвижной точки.

В работе [Breton, Vencatachellum, Zaccour, 2005] использовался метод итераций в пространстве функций. Если сходимость имеет место, то функция значения v удовлетворяет (9) или (10) (если симметрия имеет место). В этом случае, существование равновесной стратегии может быть доказано, если удается построить стратегию δ^*, которая решает следующую статическую игру для всех $x \in X$.

	Игрок 2	
Игрок 1	0	1
0	$(h_1(x,0,0,v), h_2(x,0,0,v))$	$(h_1(x,0,1,v), h_2(x,0,1,v))$
1	$(h_1(x,1,0,v), h_2(x,1,0,v))$	$(h_1(x,1,1,v), h_2(x,1,1,v))$

Если обе фирмы симметричны, то, используя (11) выигрыши могут быть написаны в более простой форме для всех $x \in X$:

	Игрок 2	
Игрок 1	0	1
	(A,A)	(C,D)
	(D,C)	(B,B)

Более сложным является вопрос нахождения функции значения. Он подробно исследуется в отмеченной нами работе.

7. Динамическая модель раздела рынка

Рассмотрим олигополию, состоящую из n фирм, пусть $x_i(t)$ – часть рынка, обслуживаемого фирмой i. Множество состояний системы X, определяется по формуле

$$X = \left\{ x_i(t) \in R \mid x_i(t) \in [0,1], i \in \{1,...,N\}, \sum_{i=1}^{N} x_i(t) = 1 \right\}$$

Обозначим через $a_i(t)$ – средства, направляемые на рекламу, i-м игроком (фирмой). Рассмотрим так называемую модель Ланчестера. В ней динамика развития рынка определяется уравнениями

$$\dot{x}_i(t) = [1 - x_i(t)] f_i(a_i(t)) - x_i(t) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} f_j(a_j(t))$$

где $f_i(a(t))$ – функция, показывающая результативность рекламных акций. Предполагается, что выполнено следующее условие $f_i'(a(t)) \geq 0$, $f_i''(a(t)) \leq 0$.

Достаточно часто функции $f_i(a(t))$ используются в виде

$$f_i(a_i) = \beta_i a_i^{\alpha_i}, \quad \beta_i > 0 \text{ и } \alpha_i \in (0,1]$$

Здесь, если $\alpha_i = 1$, маргинальные эффекты рекламы постоянны, если альфа $\alpha_i < 1$, маргинальные эффекты рекламы убывают. В подавляющем большинстве случаев полагается $\alpha_i = \dfrac{1}{2}$.

Рассмотрим как можно учесть затраты на рекламу в динамике объема продаж. Обозначим через $s_i(t)$ объем продаж фирмы i в момент t, через $a_i(t)$ – затраты на рекламу, осуществляемые фирмой i в момент t. Предположим, что скорость изменения продаж зависит от объема продаж и затрат на рекламу, осуществляемую различными фирмами. Тогда, в общем виде, уравнения движения имеют вид

$$\dot{s}_i(t) = f_i(t, s_i(t), a_1(t), ..., a_N(t)); \quad s_i(0) = s_{i0} \geq 0, \quad i \in \{1, ..., N\}$$

В случае, когда фирма только одна, ещё в работе [Vidale, Wolfe, 1957] исследовался следующий частный случай предыдущего уравнения

$$\dot{s}(t) = \gamma a(t)[m - s(t)] - \delta s(t),$$

где γ, δ и m (размер максимальных продаж) – положительные константы. Полагая, $x = s/m$ можно привести этот случай к модели раздела рынка и записать уравнение движения в виде

$$\dot{x}(t) = \gamma a(t)[1 - x(t)] - \delta s(t)$$

И мы видим здесь, что модель Ланчестера фактически является обобщением данной модели на случай двух фирм.

$$\dot{s}(t) = \gamma a_1(t)[m - s(t)] - a_2(t)s(t)$$

Имеются и другие обобщения, в которых уравнения движения записываются в виде

$$\dot{s}_i(t) = \gamma a_i(t)[m - s_1(t) - s_2(t)] - \delta_i s_i(t); \quad i \in \{1,2\}.$$

В этих формулах можно заменить линейный член, относящийся к рекламе, некоторой функцией $g_i(a_i(t))$, такой, что $g_i(0) = 0, g_i'(a_i) > 0$ и $g_i''(a_i) < 0$.

Часто рассматривается следующее уравнение движения для продаж:

$$\dot{s}_i(t) = \gamma a_i(t)\left[1 - \frac{s_i(t)}{s_1(t) + s_2(t)}\right] - \delta_i s_i(t); \quad i \in \{1,2\}$$

Во всех этих задачах в качестве выигрыша i- ой фирмы рассматривалось выражение

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho_i t}[\pi_i s_i(t) - C_i(a_i(t))]dt + e^{-\rho_i T}\Gamma_i(s_i(T)),$$

где C_i – затраты на рекламу и выполняются условия $C_i(0) = 0,\ C_i' > 0,\ C_i'' \geq 0$. В построенной дифференциальной игре в ряде случаев удается найти как равновесие по Нэшу в программных стратегиях, так и в линейных позиционных стратегиях.

Рассматривались и другие уравнения движения, в частности, если в качестве основных позиционных переменных взять доли рынка $x(t)$, то исследовались уравнения

$$\dot{x}_i(t) = [1 - x_i(t)]k_i a_i(t) - x_i(t)k_j a_j(t) - \delta_i x_i(t), \quad i, j \in \{1,2\}, \quad i \neq j.$$

В работе [Leitmann, Schmitendorf, 1978] рассмотрена следующая динамика:

$$\dot{x}_i(t) = a_i(t) - \frac{\gamma_i}{2}a_i(t)^2 - k_i x_i(t)a_j(t) - \delta_i x_i(t); \quad i \in \{1,2\}, \quad i \neq j$$

где $\gamma_i,\ \ k_i,\ \ \delta_i$ – положительные постоянные. В более общей форме, эта же динамика записывается следующим образом

$$\dot{x}_i(t) = g_i(a_i(t)) - h(a_j(t))x_i(t) - \delta_i x_i(t); \quad i \in \{1,2\}, \quad i \neq j$$

где g_i и h_i удовлетворяют условиям $g_i(0) = h_i(0) = 0,$ $g_i'(a_i) > 0, h_i'(a_i) > 0, g_i''(a_i) < 0$

В некоторых уравнениях движения включен член, показывающий эксцесс затрат на рекламу. Например, если ввести переменную $X(t) = x_1(t) + x_2(t)$, то уравнение движения для доли рынка игрока записывается в виде

$$\dot{x}_i(t) = \gamma_i a_i(t)[1 - X(t)] - \delta_i x_i(t) + \sigma_i[a_i(t) - a_j(t)]X(t); \quad i \in \{1,2\}, i \neq j.$$

Здесь в правой части уравнения присутствуют эксцесс рекламных затрат $\sigma_i[a_i(t) - a_j(t)]X(t)$. В более ранних работах подобный эксцесс присутствовал в простейших моделях:

$$\dot{x}_1(t) = a_1(t) - a_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t)$$

при этом $x_1(t) + x_2(t) = 1$.

8. Модель распространения нового продукта

При построении рассматриваемых в данном разделе моделей считается, что на процесс распространения влияют следующие основные моменты:

1. передача информации от потребителя к потребителю в результате социальных взаимодействий;
2. работа фирмы в средствах массовой информации, в частности, реклама;
3. ценовая политика, используемая фирмой на рынке;

Рассмотрим сначала модель с одним участником, то есть случай монополии. Пусть период времени ограничен и равен $[0,T]$. Каждый потребитель покупает лишь одну единицу товара в течение планируемого периода. Обозначим через $x(t)$ размер общих продаж в момент t, тогда предлагается следующая модель движения

$$\dot{x}(t) = p[m - x(t)] + \frac{q}{m}x(t)[m - x(t)], \quad x(0) = 0$$

где m – потенциал рынка, а $p > 0$ и $q > 0$ – коэффициенты инновации и имитации. Тогда, решая это уравнение, получаем окончательную формулу для суммарных продаж

$$x(t) = \frac{mp[1 - e^{-(p+q)t}]}{p + qe^{-(p+q)t}}$$

Рассматривались и другие уравнения движения, например

$$\dot{x}(t) = [\alpha + \beta \ln a(t) + \gamma x(t)](m - x(t))$$

Здесь $a(t)$ интерпретируется как потребление, а величины α, β, γ суть положительные константы. Если $\alpha = \gamma = 0$ и добавляется отрицательное слагаемое вида $\delta x(t)$, то фактически приходим к модели Видаля-Вольфа, рассмотренной ранее. Рассматривались так же и другие динамики, например

$$\dot{x}(t) = [\alpha + \beta a(t) + \gamma x(t) + \theta a(t)x(t)](m - x(t)),$$
$$\dot{x}(t) = [\alpha + \beta f(a(t)) + \gamma x(t) + \theta f(a(t))x(t)](m - x(t)).$$

При переходе к теоретико-игровым моделям уравнения движения для переменной, обозначающей размеры продаж i-го игрока предлагались в виде

$$\dot{x}_i(t) = [\alpha_i + \beta_i a_i(t) + \gamma_i x_i(t) + \theta_i a_i(t)x_i(t)](m - X(t)),$$

где $X(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t)$ – общие продажи, происходящие в отрасли.

Вместо рассмотрения конкретных правых частей уравнений, иногда рассматривалась правая часть в виде общей функции, зависящей от объемов продаж игроков и затрат на рекламу, однако ставились дополнительные математические ограничения на правые части.

Интересным является подход, где вводится новая переменная G – число потребителей, хорошо, воспринимающих рекламу (advertizing goodwill); для случая одной рекламирующей фирмы, уравнение движения имеет простой вид

$$\dot{G}(t) = a(t) - \delta G(t), \quad G(0) = G_0 \geq 0.$$

В случае, когда имеется несколько рекламирующих компаний и если через G_i обозначить число хорошо настроенных людей по отношению к рекламе i - ой фирмы, уравнения движения будут иметь вид:

$$\dot{G}_i(t) = a_i(t) - \delta G_i(t), \quad G_i(0) = G_{i0} \geq 0.$$

Рассматривалась дифференциальная игра, в которой выигрыши зависели от числа людей, воспринимающих рекламу данного игрока, ровно как от цены и других вспомогательных переменных. Если $x_i(t)$ – доля рынка, занятого фирмой i, то можно предположить, что эта доля определяется по правилу

$$x_i(t) = \frac{G_i(t)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{N} G_i(t)^{\alpha}},$$

где $\alpha > 0$. Если $\alpha = 0$ потребители действуют, не обращая внимания на рекламу, и случайно выбирают среди различных товаров (с вероятностью $1/N$ выбирают фирму, в которой совершить покупку). Здесь также имеются результаты, касающиеся равновесия по Нэшу.

9. Динамические модели ценообразования

Рассмотрим случай одного игрока, то есть задачу ценообразования у фирмы – монополиста. Пусть $p(t)$ цена в момент $t \in [0,T]$. Потребление $q(t)$ предполагается линейным

$$q(t) = \alpha - \beta p(t),$$

где α и β – положительные параметры $x(t)$ – продукт произведенный с начала процесса $t = 0$ к моменту t, то есть

$$x(t) = \int_0^t q(z)dz$$

$c(x)$ – затраты на производство единицы продукции, и предполагаем, что $c'(x) \le 0$ и $c''(x) \ge 0$. Фирма решает следующую задачу оптимизации

$$\max_p \left\{ J = \int_0^T e^{-\rho t} [p(t) - c(x(t))] q(t) dt \right\}$$

при условии $q(t) = \dot{x}(t) = \alpha - \beta p(t), \quad x(0) = 0$ и ограничениях на управление $p(t) \in [c(x), \alpha/\beta]$. Гамильтониан этой системы имеет вид

$$H(p, x, \lambda) = [p - c(x) + \lambda][\alpha - \beta p],$$

где λ – сопряженная переменная. Необходимое условие оптимальности, когда $p(t) \in [c(x), \alpha/\beta]$ выглядит следующим образом

$$\dot{x}(t) = \alpha - \beta p(t)$$
$$\dot{\lambda}(t) = \rho\lambda(t) + c'(x(t))[\alpha - \beta p], \quad \lambda(T) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = 0 \Leftrightarrow p(t) = \frac{\alpha + \beta c(x(t)) - \beta\lambda(t)}{2\beta}$$

Таким образом, оптимальная цена зависит от единичных затрат и теневой цены $\lambda(t)$. Для теневой цены получаем формулу

$$\lambda(t) = -e^{\rho t}\int_t^T e^{-\rho s}[c'(x(s)\dot{x}(s))]ds\,.$$

Заметим, что функция $c'(x)$ под интегралом отрицательная и поэтому всегда имеет место $\lambda(t) \geq 0$. Развитие цены во времени происходит по формуле

$$\dot{p}(t) = \frac{-\rho\lambda(t)}{2} < 0\,.$$

Рассмотрим теперь динамическую модель так называемого близорукого ценообразования. Близорукое ценообразование ориентируется на оптимизацию текущего дохода, не обращая внимания на развитие общих продаж. Этот мгновенный доход определяется по формуле

$$\pi(t) = [p(t) - c(x(t))][\alpha - \beta p(t)]\,.$$

Легко видеть, что так называемая близорукая цена будет равна

$$p^m(t) = \frac{\alpha + \beta c(x^m(t))}{2\beta}\,,$$

где верхний индекс m означает близорукое поведение. Развитие цены во времени определяется по формуле

$$\dot{p}^m(t) = \frac{c'(x^m)\dot{x}^m}{2} < 0$$

Исследование модели приводит к следующим выводам:

- динамическое ценообразование лучше, чем близорукое с точки зрения доходов фирмы;

- динамическое ценообразование лучше, чем близорукое так же с точки зрения потребителя, поскольку оно обеспечивает меньшую цену, а значит и возможность сделать больше закупок;
- динамическая цена не обязательно зависти от времени, например в случае линейных затрат.

Рассмотрим теперь конкурентную ситуацию, когда участвует несколько фирм. Итак, пусть в отрасли имеется M фирм, и фирма $i \in \{1,...,M\}$ управляет своей ценой $p_i(t) \ge 0, t \in [0,T]$. Скорость изменения продаж определяется уравнением движения

$$\dot{x}_i(t) = f_i(p_1(t),...,p_M(t)).$$

Таким образом, суммарные продажи с момента начала продаж имеют вид

$$x_i(t) = \int_0^t \dot{x}_i(s)ds$$

На функцию f_i накладываются следующие условия

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i} < 0, \ \frac{\partial f_i}{\partial p_j} > 0, \ \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial f_i}{\partial p_j} < 0, \ \frac{\partial^2 f_i}{\partial p_i \partial p_j} \le 0.$$

Эти ограничения являются стандартными и часто используются в прикладных задачах. Пусть $c_i(x_i)$ затраты на производство фирмы i. И пусть эта функция является убывающей и выпуклой. Предполагаем, что каждая из фирм стремиться максимизировать дисконтированный доход

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho_i t}[p_i(t) - c_i(x_i(t))]\dot{x}_i(t)dt$$

где ρ_i – дисконт фактор фирмы i. Для данной задачи исследовалось равновесие по Нэшу в программных стратегиях. Используя необходимые условия, можно получить равновесные цены для i - ой фирмы

$$p_i(t) = \frac{\eta_i}{\eta_i - 1}[c_i(x_i(t)) - \lambda_i(t)],$$

где $\eta_i = \eta_i(t)$ – эластичность спроса по отношению к цене, то есть $\eta_i = -\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\frac{p_i}{f_i}$ и λ_i – сопряженная переменная. Для характеристики равновесных ценовых траекторий вводится следующие два условия

$$1 - \frac{\frac{\partial^2 f_i}{\partial p_i^2}}{\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\right)^2} \geq 0, \quad -\frac{\frac{\partial^2 f_i}{\partial p_i \partial p_j}}{\frac{\partial f_i}{\partial p_j}} p_i \leq \eta_i .$$

Первое условие удовлетворяется всеми функциями спроса, которые строго вогнуты или линейны по ценам. Грубо говоря, оно означает, что функция спроса не является слишком выпуклой. Второе условие не имеет непосредственной интерпретации. При таких условиях Докнер Е. и Ёргенсон С. ([Dockner E.J., Jorgensen S. 1988]) доказали, что равновесные цены строго убывают во времени.

Рассмотрим теперь более сложную модель, в которой учитывается изучение спроса. Основой является следующая модель:

$$\dot{x}(t) = [P + q(x)t][m - x(t)],$$

здесь $\dot{x}(t)$ есть скорость продаж в момент t и $x(t)$ – продажи от начала процесса до момента t. Параметр $P > 0$ означает коэффициент инновации и $q > 0$ – коэффициент имитации. В эту модель можно включить ценообразование, а именно переписать предыдущее уравнение в виде

$$\dot{x}(t) = [P + q(x)t][m - x(t)]e^{-dp(t)},$$

где $p(t)$ – цена, определяемая монополистом и $d > 0$ – некоторый параметр.

Перейдем теперь к распространению этих моделей, включив конкуренцию между несколькими фирмами, учет затрат и диффузионные эффекты со стороны потребителей. В общем виде можем записать следующее уравнение

$$\dot{x}_i(t) = f_i(p_1(t),..., p_N(t), x_1(t),..., x_N(t)) .$$

Однако это уравнение мало что дает, поэтому рассмотрим частный случай конкуренции, учитывающий спрос и конкуренции, приводящий к перераспределению цен. Рассмотрим сначала случай только учета спроса. Пусть эволюция продаж развивается в соответствии с уравнениями:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(p_i(t), x_1(t), ..., x_N(t)).$$

Докнер Е. ([Dockner E.J. 1985]) рассматривал случай дуополии, в которой функции f_i были разделены

$$\dot{x}_i(t) = F_i(p_i(t))[1 - x_1(t) - x_2(t)], \quad i, j \in \{1,2\}, \quad i \neq j.$$

Потенциал рынка m был нормализован к единице и не учитывались эффекты имитации. Выигрыши игроков определялись по формуле

$$J_i = \int_0^T [p_i(t) - c]\dot{x}_i(t)dt.$$

Было показано, что вдоль оптимальных траекторий движения цен в ситуации равновесия по Нэшу в программных стратегиях, цены убывали, в случае, когда

$$(i)\ F_i(p_i) = e^{-p_i} \quad \text{или} \quad (ii)\ F_i(p_i) = e^{-\varepsilon}\ (\varepsilon > 2).$$

Эти результаты получены без учета дисконтирования, и при равных затратах на единицу продукции у обеих фирм. Далее эта модель была обобщена и для случая, когда уравнение движения для затрат имело более общий вид

$$\dot{x}_i(t) = f_i(p_i(t))k_i(x_1(t), x_2(t)), \quad i, j \in \{1,2\}, \quad i \neq j$$

При этом были наложены следующие условия. Функции $k_i(x_1(t), x_2(t))$ вогнуты и удовлетворяют условию

$$sign\frac{\partial k_i}{\partial x_j} = sign\frac{\partial k_i}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 k_i}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial k_i}{\partial x_j} f_j - \frac{\frac{\partial^2 k_j}{\partial x_i^2}}{\frac{\partial k_j}{\partial x_i}} k_i f_i \geq 0 .$$

Исследовалось равновесие по Нэшу в программных стратегиях и получены следующие результаты: цены p_i все время растут, если

$$\frac{\partial k_i(x_i x_j)}{\partial x_i}|_{t=T} > 0 .$$

Цены растут на некотором начальном интервале, а далее убывают, если

$$\frac{\partial k_i(x_i x_j)}{\partial x_i}|_{t=0} > 0 \text{ и } \frac{\partial k_i(x_i x_j)}{\partial x_i(T)}|_{t=T} < 0$$

Более интересными являются модели, в которых скорость продаж i- ой фирмы зависит не только от цены, назначаемой данной фирмой, но и от цен конкурентов. Очевидно, что данная модель является более реалистичной. Рассмотрим общую динамику для случая двух фирм

$$\dot{x}_i(t) = f_i(p_1(t), p_2(t))k_i(x_1(t), x_2(t)), \quad i \in \{1,2\}$$

и более частный случай

$$\dot{x}_i(t) = [\alpha_i - \beta_i p_i(t) + \gamma(p_j(t) - p_i(t))]k(x(t)) .$$

где $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ – коммулятивные продажи (объем продаж с момента начала процесса) в отрасли.

Здесь также исследовались траектории изменения цен в случае, когда использовалось равновесие по Нэшу в программных стратегиях. Были сделаны следующие выводы,

- если $k'(x)$ всегда положительно, равновесная цена возрастает по времени t,
- если $k'(x)$ всюду отрицательно, и кроме того $\beta_1 = \beta_2 = \beta, c_1 = c_2 = c$, оказывается, что цена убывает во времени и оба игрока назначают одинаковые цены.

Рассматривался так же и случай, когда динамика имеет более специальный вид

$$\dot{x}_i(t) = f_i(p_1(t),...,p_N(t))k_i(x_i(t)), \quad i \in \{1,...,N\}.$$

При этом качественные результаты вполне эквивалентны предыдущим. Специально рассматривался вопрос назначения цен на новую продукцию в динамической игре вида лидер и ведомый. При этом уравнения движения имели более сложную структуру

$$\dot{x}_i(t) = [\alpha_i - \beta_i p_i(t) + \varsigma(p_j(t) - p_i(t))][a_i + b_i x_i(t)][N - x_l(t) - x_f(t)]$$
$$x_i(0) = x_{i0}, \quad i, j \in \{l, f\}, \quad i \neq j$$

Здесь индекс l – лидер, f – ведомый. Затраты на единицу продукции определяются по формуле

$$c_i(x_i(t)) = c_i^0(1 + x_i(t))^{-\lambda_i}.$$

Была рассмотрена задача в позиционных стратегиях, и найдено соответствующее равновесие по Штакельбергу. Это привело к следующим выводам:

- цены, как лидера, так и ведомого убывают во времени,
- игрок, у которого затраты меньше, соответственно и цены меньше,
- игрок, у которого лучше условия производства, определяемые инновационными a_i и имитационными b_i параметрами, цены находятся на более низком уровне, чем у конкурента.

Рассматривался также случай равновесных цен в дуополии, когда фирма продавала 2 продукта: один – первичный, один – сопутствующий. Сопутствующий продукт (видеомагнитофон) может быть использован, если потребитель имеет первичный продукт (телевизор). Пусть $x_i(t)$ и $y_i(t)$ означают коммулятивные продажи соответственно фирмами $i \in \{1,2\}$. Динамика продаж определяется по формулам

$$\dot{x}_i(t) = f_i(p_{1x}(t), p_{2x}(t))k(z(t))$$

$$\dot{y}_i(t) = F_i(p_{1y}(t), p_{2y}(t))\beta z(t)$$

где $p_{1x}(t)$ и $p_{1y}(t)$ – цены, устанавливаемые фирмой для своего первичного и вторичного продуктов соответственно и $z(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Параметр β положителен и обозначает интенсивность использования соответствующего продукта. Ценообразующие функции f_i и F_i предполагаются линейными. Предполагая постоянными единичные затраты для всех продуктов, получен следующий результат для равновесных траекторий в ситуации равновесия в программных стратегиях:

- если фирмы симметричны и имеется дисконт, цена сопутствующего продукта каждой из фирм постоянна во времени;
- если имеется положительные диффузионные эффекты для первичного продукта, то есть $k'(z) > 0$ и скорость распространения вторичного продукта высока, цена первичного продукта убывает для тех t, для которых $\ddot{z}(t) > 0$, при условии, если горизонт планирования достаточно велик.

10. Динамические модели маркетинговых каналов

Под маркетинговым каналом понимается совокупность независимых фирм (производителей, оптовых торговцев, розничных продавцов и других).

Существует две основные характеристики, которые делают интересным изучение каналов с помощью теоретико-игровых методов:

- Количество игроков (участников канала) несколько и их всегда можно определить
- Прибыль каждой фирмы зависит от действий остальных участников канала.

Размер выпускаемой продукции зависит от того, каким образом участники маркетингового канала принимают решения. Рассмотрим два случая: согласованное и несогласованное решение. Последствия несогласованного решения приводят к необходимости конструировать согласованные механизмы (возмещение расходов на рекламу, скидки для розничных продавцов и др.).

Рассмотрим сначала статическую модель с одним производителем и одним продавцом (M и R соответственно). Предположим, что производитель выбирает затраты на рекламу $a_M \geq 0$, а продавец – затраты $a_R \geq 0$. В результате, квадратичные затраты на рекламу имеют вид

$$C_M(a_M) = \frac{w_M}{2} a_M^2, \quad C_R(a_R) = \frac{w_R}{2} a_R^2$$

Объем спроса на продукцию рекламируемого брэнда на розничном рынке можно представить в виде

$$D(a_M, a_R) = \alpha + \beta(a_M + a_R), \quad \alpha, \beta > 0$$

Трансферная цена (цена, по которой самостоятельные подразделения крупной корпорации продают товары друг другу, т. е. цена, применяемая во взаиморасчетах между самостоятельными подразделениями) p_M и розничная цена p_R предполагаются постоянными.

Таким образом, задача максимизации выигрыша для двух участников канала имеет следующий вид:

$$\max_{a_M \geq 0} \left\{ J_M(a_M, a_R) = p_M[\alpha + \beta(a_M + a_R)] - \frac{w_M}{2} a_M^2 \right\}$$
$$\max_{a_M \geq 0} \left\{ J_R(a_M, a_R) = p_R[\alpha + \beta(a_M + a_R)] - \frac{w_R}{2} a_R^2 \right\}$$

Несогласованное решение для участников получается из следующей системы уравнений

$$\frac{\partial J_M}{\partial a_M} = \beta p_M - w_M a_M^* = 0, \quad \frac{\partial J_R}{\partial a_R} = \beta p_R - w_R a_R^* = 0$$

Каждая фирма выбирает такие затраты на рекламу, чтобы уравнять предельную выручку и предельные затраты. Из предыдущих уравнений получаем оптимальные затраты на рекламу:

$$a_M^* = \frac{\beta p_M}{w_M}, \quad a_R^* = \frac{\beta p_R}{w_R}$$

Таким образом, оптимальная прибыль записывается в виде:

$$J_M^* = p_M \left[\alpha + \frac{\beta^2 p_M}{2w_M} + \frac{\beta^2 p_M}{2w_R} \right], \quad J_R^* = p_R \left[\alpha + \frac{\beta^2 p_M}{2w_M} + \frac{\beta^2 p_M}{2w_R} \right]$$

Суммарная прибыль J^* в случае равновесия имеет вид:

$$J^* = \alpha(p_M + p_R) + \frac{\beta^2}{2w_M w_R}\left[2p_M p_R(w_M + w_R) + w_M p_R^2 + w_R p_M^2\right]$$

Предположим теперь, что участники канала совместно максимизируют прибыль (кооперируются). Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$J = J_M + J_R = (p_M + p_R)[\alpha + \beta(a_M + a_R)] - \frac{w_M}{2}\alpha_M^2 - \frac{w_R}{2}\alpha_R^2$$

Решение для затрат на рекламу имеет вид:

$$a_M^C = \frac{\beta(p_M + p_R)}{w_M}, \quad a_R^C = \frac{\beta(p_M + p_R)}{w_R}$$

И оптимальная суммарная прибыль записывается в виде:

$$J^C = \alpha(p_M + p_R) + \frac{\beta^2(p_M + p_R)^2(w_M + w_R)}{2w_M w_R}$$

Теперь остается лишь вопрос о том, как разделить общую прибыль между двумя фирмами. Самый простой способ – дать каждой фирме размер прибыли, вычисленный при оптимальных значениях (a_M^C, a_R^C):

$$J_M^C(a_M^C, a_R^C) = \alpha p_M + \frac{\beta^2(p_M + p_R)}{2w_M w_R}[w_R(p_M - p_R) + 2w_M p_M)]$$

$$J_R^C(a_M^C, a_R^C) = \alpha p_R + \frac{\beta^2(p_M + p_R)}{2w_M w_R}[w_M(p_M - p_R) + 2w_R p_R)]$$

Сравнивая затраты на рекламу каждой фирмы в случае согласованного и несогласованного поведения, легко видеть, что обе фирмы будут рекламировать больше в случае согласованности.

Для каждого игрока определим разницу в прибыли при согласованном и несогласованном решении:

$$J_M^C - J_M^* = k[2p_M^2 w_M - p_R^2 w_R]$$
$$J_R^C - J_R^* = k[2p_R^2 w_R - p_M^2 w_M]$$

где $k = \beta^2 / 2w_M w_R$. Если оба выражения в скобках являются положительными, случай согласованного решения является Парето-оптимальным. Если же одно из выражений – отрицательное, необходимо обеспечить побочный платеж, чтобы гарантировать выполнение условия индивидуальной рациональности.

Здесь можно использовать арбитражную схему Нэша:

$$J_M^C = J_M^* + \frac{1}{2}(J^C - J^*)$$

и

$$J_R^C = J_R^* + \frac{1}{2}(J^C - J^*)$$

При такой схеме выполняется равенство $J_M^C + J_R^C = J^C$ и имеет место условие индивидуальной рациональности: $J_j^C > J_j^*$ для $j \in \{M, R\}$.

Легко показать, что в случае согласованного поведения, спрос выше, чем в случае несогласованного. Следовательно, потребители готовы платить больше, когда участники канала кооперируются, однако, следует заметить, что кооперативное решение не является состоятельным во времени (динамически устойчивым) ([Зенкевич, Петросян, 2006]).

Рассмотрим теперь теоретико-игровую постановку. Чинтагута и Чен ([Chintaguhta, Jain, 1992]) были одними из первых, кто исследовал проблему согласования в рыночных каналах, используя дифференциальные игры.

Рассмотрим модель с одним производителем и одним продавцом. Обозначим через $a_M(t) \ge 0$ и $a_R(t) \ge 0$ затраты на рекламу обеих фирм при $t \in [0, \infty)$.

Пусть $G_M(t) \ge 0$ и $G_R(t) \ge 0$ – благосостояние фирм.

$$\dot{G}_j(t) = a_j(t) - \delta G_j(t); \quad G_j(0) = G_{0j}, \quad j \in \{M, N\}$$

Функция реакции сбыта $S(G_M, G_R)$ имеет вид:

$$S(G_M, G_R) = \alpha_M G_M + \alpha_R G_R + \beta_M G_M^2 + \beta_R G_R^2 + \gamma G_M G_R$$

где $\alpha_M, \alpha_R, \gamma > 0$ и $\beta_M, \beta_R < 0$.

Предполагается, что затраты на рекламу выражаются квадратичной функцией.

Доходы продавца делятся между рассматриваемыми фирмами: M получает долю π и R получает долю $\pi - 1$.

В рассматриваемой модели определено равновесие по Нэшу в программных стратегиях и найдено решение задачи совместной максимизации прибыли.

Основные полученные выводы следующие:

- Объемы инвестиций в рекламу обоих игроков больше в случае согласованного поведения
- Согласование стратегий приводит к большему доходу

Ёргенсон и Заккур ([Jorgensen, Zaccour, 2002]) исследовали следующую модель:

Пусть имеется одна переменная благосостояния, $G(t)$:

$$\dot{G}(t) = \alpha_M(t) + \alpha_R(t) - \delta G(t), \quad G(0) = G_0$$

Управляющей переменной является потребительская цена $p_R(t)$. Она определяется производителем на основании розничной цены и трансферной цены $p_M(t)$.

Функция реакции сбыта имеет вид:

$$S(p_R, G) = [\alpha - \beta p_R]\left[g_1 G - \frac{g_2}{2} G^2\right]$$

где $\alpha, \beta, g_1, g_2 > 0$.

Функционалы выигрыша обоих игроков следующие:

$$J_M = \int_0^\infty e^{-\rho t}[(p_M(t) - c)S(p_R(t), G(t)) - C_M(a_M(t))]dt$$

$$J_R = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}[(p_R(t) - p_M(t)c)S(p_R(t), G(t)) - C_R(a_R(t))]dt$$

где c – затраты производителя на единицу продукции и $C_j(a_j)$ квадратичные затраты на рекламу для фирмы $j \in \{M, R\}$.

Основные результаты исследования могут быть сформулированы так:

- цены – постоянные. Розничная цена выше в случае несогласованного поведения,
- затраты на рекламу уменьшаются, если благосостояние увеличивается,
- совместное рекламирование эффективнее и благосостояние более устойчиво в случае согласованного решения.

Однако, в случае совместного рекламирования (кооперации) не исследовался вопрос временной состоятельности (динамической устойчивости) кооперации, что делает соответствующие результаты недостаточно обоснованными.

Список литературы

Зенкевич Н. А., Петросян Л. А. 2006. *Проблемы временной состоятельности кооперативных решений* Научные доклады № 8 (R) – 2006. СПб.: НИИ менеджмента СПбГУ, 2006.

Зенкевич Н.А., Зятчин А.В. 2004 Исследование динамической модели Макдональда – Сайгела. В кн.: Н.А. Зенкевич (ред.) *Математические методы исследования экономики* СПб.: МБИ; 47 – 56 с.

Зенкевич Н.А., Зятчин А.В.2006 Стохастическая модель процесса конкуренции в случае полной, неполной и ассиметричной информации. В кн.: Н.А. Зенкевич, Д.В. Кузютин (ред.) *Математические методы исследования в экономике* Изд-во МБИ, СПб.: 131-148

Bergen M., John G. 1997. Understanding cooperative advertising participation rates in conventional channels. *Journal of Marketing research* **34**: 357-369.

Bhaskar V. 1989. Quick responses in duopoly ensure monopoly pricing. *Economics Letters* **29**: 103-107.

Breton M., Vencatachellum D., Zaccour G. Dynamic R&D with Strategic Behavior *Computers and operation research.* 2005

Cheng L. 1984. International competition in R&D and technological leadership. *Journal of international Economics* **17**: 15-40.

Chintagunta P.K., Jain D. 1992. A dynamic model of channel member strategies for marketing expenditures. *Marketing Science* **11**: 168-188.

Chwe M.S.-Y. 1994. Farsighted coalitional stability. *Journal of Economic Theory* **63**: 299-325.

Dockner E.J. 1985. Optimal pricing in a dynamic duopoly game model. *Zeitschrift für Operations Research* **29**: B1-B16.

Dockner E.J. 1988. On the Relation Between Dynamic Oligopolistic Competition and Long-Run Competitive Equilibrium. *European Journal of Political Economy* **4**: 47-64.

Dockner E.J., Feichtinger G. 1986. Dynamic Advertising and S Pricing in an Oligopoly: A Nash Equilibrium Approach. In: Basar T. (ed). *Dynamic Games and Applications in Economics*. Springer-Verlag; 238-251

Dockner E.J., Gaunersdorfer A. 2002. Dynamic Oligopolistic Competition and Quasi-Competitive Behavior. In: Zaccour G. (ed.). *Optimal Control and Differential Games: Essays in Honor of Steffen J0rgensen.* Kluwer Academic Publishers, Boston; 107-119.

Dockner E.J., Feichtinger G., Mehlmann A. 1989. Noncoopera-tive Solutions for a Differential Game of Fishery. *Journal of Economic Dynamics and Control* **13**: 1-20.

Dockner E.J., Jorgensen S. 1988. Optimal advertising policies for diffusion models of new product innovation in monopolistic situations *Management Science* **34** (1): 119–130.

Dockner E.J., Takahashi H. 1990. On the Saddle-point Stability of for a Class of Dynamic Games. *Journal of Optimization Theory and Applications* **67**: 247-258.

Driskill R.A., McCafferty S. 1989. Dynamic Duopoly with Adjustment Costs: A Differential Game Approach. *Journal of Economic Theory* **49**: 324-338.

Dunning J.H. 1997. The sourcing of technological advantage by multinational enterprises. In: Macharzin, K., Oesterle, M.J., Wolf, J (Eds.). *Global Business in the Information Age*. Proceedings of the 23rd Annual EIBA Conference EXTEC, Stuttgart.

Duranton G. 2000. Cumulative investment and spillovers in the formation of technological Landscapes. *Journal of Industrial Economics* **48**: 205-215.

Greenberg J. 1990. *The Theory of Social Situations: An Alternative Game Theoretic Approach*. Cambridge University Press: London.

Harsanyi J. 1974. An equilibrium-point interpretation of stable sets and a proposed alternative definition. *Management Science* **20**: 1472-1495.

Fershtman C., Kamien M.I. 1990. Turnpike Properties in a Finite-Horizon Differential Game: Dynamic Duopoly with Sticky Prices. *International Economic Review* **31**: 49-60.

Fibich G., Gavious A., Lowengart O. 2003. Explicit Solutions of Optimization Models and Differential Games with Nonsmooth (Asymmetric) Reference-Price Effects. *Operations Research* **51**: 721-734.

Jeuland A.P., Shugan S.M. 1983. Managing channel profits. *Marketing Science* **2**: 239-272.

J0rgensen S., Zaccour G. 1999. Equilibrium pricing and advertising strategies in a marketing channel. *Journal of Optimization Theory and Applications* **102**: 111-125.

J0rgensen S., Zaccour G. 2002. Channel coordination over time: Incentive equilibria and credibility. *Journal of Economic Dynamics and Control* **27** (5): 801-822.

J0rgensen S., Sigue S.P., Zaccour G. 2000. Dynamic cooperative advertising in a channel. *Journal of Retailing* **76** (1): 71-92.

J0rgensen S., Sigue S.P., Zaccour G. 2001. Stackelberg leadership in a marketing channel. *International Game Theory Review* **3** (1): 13-26.

J0rgensen S., Taboubi S., Zaccour G. 2001. Cooperative advertising in a marketing channel. *Journal of Optimization Theory and Applications* **110** (1) 145-158.

J0rgensen S., Zaccour G. 2001. Time Consistent Side Payments in a Dynamic Game of Downstream Pollution. *Journal of Economic Dynamics and Control* **25**: 1973-1987.

Jorgensen S., Zaccour G. 2002. Time consistency in cooperative differential games. In: Zaccour G. (ed.). *Decision and control in management sciences: essays in honor of Alan Haurie.* Kluwer Science Publisher: London; pp. 349-366.

J0rgensen S., Zaccour G. 2003. *Differential Games in Marketing*. Kluwer Academic Publishers: Boston.

Leitmann G., Schmitendorf W.E. 1978. Profit Maximization through Advertising: A Nonzero Sum Differential Game Approach *IEEE Transactions on Automatic Control* **23**: 646-650.

Maskin E., Tirole J. 1988a. A theory of dynamic oligopoly I: Overview and quantity competition with large fixed costs. *Econometrica* **56**: 549-569.

Maskin E., Tirole J. 1988b. A theory of dynamic oligopoly II: Price competition, kinked demand curves, and edgeworth cycles. *Econometrica* **56**: 571-599.

Maskin E., Tirole J. 1987. A theory of dynamic oligopoly III: Cournot competition. *European Economic Review* **31**: 947-969.

McMillan J., Sinn H.-W. 1984. Oligopolistic Extraction of a Common Property Resource: Dynamic Equilibria. In: Kemp M.C., Long N.V. (eds.). *Essays in the Economics of Exhaustible Resources*. North-Holland, Amsterdam; 199-214.

Moorthy K.S. 1988. Managing channel profits: comment. *Marketing Science* **6**: 375-379

Munro G. 1990. The Optimal Management of Transboundary Fisheries: Game Theoretic Considerations. *Natural Resource Modeling* **4**: 403-426.

Muto S., Okada D. 1996. Von Neumann-Morgenstern stable sets in a price-setting duopoly. *Economy and Economics*. Faculty of Economics, Tokyo Metropolitan University **81**: 1-14.

Muto S., Okada D. 1998. Von Neumann-Morgenstern stable sets in Cournot competition, *Economy and Economics*, Faculty of Economics, Tokyo Metropolitan University **85**: 37-57.

Okuguchi K., Szidarovsky F. 1999. *The theory of oligopoly with multi-product firms*. Springer: Heidelberg, Berlin.

Petit M.L., Tolwinski B. 1999. R&D cooperation or competition? *European Economic Review* **43**: 185-208.

Petit M.L., Sanna Randaccio F., Tolwinski B. 2000. Innovation and foreign investment in a dynamic oligopoly. *International Game Theory Review* **2**: 1-28.

Petrosjan L.A., Zakharov V.V. 1996. *Mathematical Models in Environmental Policy Analysis*, Nova Science Bbl. N.Y.

Piga C. 2000. Competition in a Duopoly with Sticky Price and Advertising. *International Journal of Industrial Organization* **18**: 595-614.

Reinganum J.F. 1981. Dynamic Games of Innovation. *Journal of Economic Theory* **25**: 21-41.

Reinganum J.F. 1982. A Dynamic Game of R and D: Patent Protection and Competitive Behavior. *Econometrica* **50**: 671-688.

Reinganum J.F. 1985a. Innovation and Industry Evolution. *The Quarterly Journal of Economics* **100**: 81-99.

Reinganum J.F. 1985b. A Two-Stage Model of Research and Development with Endogeneous Second-Mover Advantages. *International Journal of Industrial Organization* **3**: 275-292.

Simaan M., Takayama T. 1978. Game Theory Applied to Dynamic Duopoly Problems with Production Constraints. *Automatica* **14**: 161-166.

Sorger G. 1998. Markov-Perfect Nash Equilibria in a Class of Resource Games. *Economic Theory* **11**: 79-100.

Tolwinski B. 1989. Newton-type methods for stochastic games. In: Basar T., Bernhard P. (eds.). *Differential Games and Applications* Springer-Verlag: Heidelberg.

Tsutsui S. 1996. Capacity Constraints and Voluntary Output Cutback in Dynamic Cournot Competition. *Journal of Economic Dynamics and Control* **20**: 1683-1708.

Vencatachellum D. 1998. A Differential R&D Game: Implications for Knowledge-Based Growth Models. *Journal of Optimization Theory and Applications* **96**: 175-189.

Vidale M. L., Wolfe H. B. 1957 An Operations-Research Study of Sales Response to Advertising *Operations Research* **5** (3): 370-381.

von Neumann J., Morgenstern O. 1953. *The Theory of Games and Economic Behavior*. 3rd ed., Princeton University Press, Princeton: NJ.

Zenkevich N.A., Zyatchin A.V. 2007. Solution for an environmental engineering development game *International yearbook of game theory and application* Nova Science Bbl. N.Y. (принято в печать)