

ТЕОРИЯ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГИПОТЕЗЫ КОГЕРЕНТНЫХ РЫНКОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ВЕГЕ-ИЗИНГА

В докладе анализируется теория когерентного финансового рынка на примере поведения индекса SP500. Предлагается многофакторная модель поведения финансового рынка, в основе которой лежит физическая модель Изинга плотности вероятности распределения намагниченности в ферромагнетике (напомним, кстати, что решение знаменитого уравнения Блэка-Шоулса ценообразования опциона было получено Черчиллем на 10 лет ранее в 1963 году при решении теплового уравнения диффузии в твердом теле). В отличие от упомянутой модели Блэка-Шоулса [1], базировавшейся на теории эффективного рынка и не допускавшей возможности долгосрочного прогнозирования цен, теория когерентного рынка [2] допускает, что в некоторые периоды времени рынок в большей или меньшей степени становится прогнозируемым. Удалось показать, что характеристики состояния рынка связаны с характеристикой «долгосрочной памяти» Херста, характеризующей настроение участников рынка; привести формулы расчета для характеристики, отвечающей за внешние фундаментальные экономические и политические факторы и, наконец, в отличие от физической модели Изинга, в которой предполагается постоянное число намагничивающихся элементов, показано, что число участников рынка напрямую связано с текущим состоянием рынка.

3.1. Гипотеза когерентных рынков

Теории хаоса пытается предсказать движение рыночных цен с точки зрения нелинейных детерминистических моделей. В противоположность ей гипотеза когерентного рынка (Coherent Market Hypothesis – CMH) является нелинейной статистической моделью. Модель была разработана Тонисом Веге и описана в 1990 году в статье [2]. В основе модели Веге использована

теория социальной имитации, которая в свою очередь является развитием физической модели Изинга описывающая когерентное молекулярное поведение в ферромагнетике (т.е. в металле, обладающем высокой магнитной проницаемостью).

Модель Изинга. Как отмечает Шредер [3, стр. 458], большинство физических моделей настолько сложны, что приходится полагаться лишь на достаточно простые модели реальности. Одной из таких моделей является модель спиновых систем, названная в честь известного физика Эрнеста Изинга и ставшая в настоящее время основой для создания статистических моделей фазовых переходов в различных областях физики.

Для примера [2], рассмотрим модель в приложении к ферромагнетикам, представляющие собой удобные системы, в которых можно наблюдать фазовые переходы различных типов. В качестве примера ферромагнетика возьмем брусок железа. В модели Изинга спины (магнитные моменты) могут принимать только два выделенных направления – либо вверх (положительный спин), либо вниз (отрицательный спин). Уровень магнитного поля будет зависеть от двух параметров: связи соседних молекул (внутренняя кластеризация) и наличия внешнего поля.

Если железный брусок нагрет, случайные столкновения соседних молекул будут являться причиной хаотического молекулярного движения. Время от времени, большая часть молекул может быть направлена вверх или вниз, но в среднем, разница между количеством молекул направленных вверх или вниз будет равна нулю, и как результат мы будем иметь нормальное вероятностное распределение.

Если температура железного бруска понижается ниже критической отметки, то взаимодействие между соседними молекулами усиливается и начинает превышать случайные термальные силы. В случае, если группа молекул начнет движение в определенном направлении, то соседние молекулы также последуют в этом направлении. Вскоре сформируются

большие группы как положительно, так и отрицательно направленных молекул, которые на макроскопическом уровне станут причиной долговременных флуктуаций магнитного поля. Однако, если нет внешнего смещения, имеющего тенденцию выравнивать группы в том или ином направлении, среднее значение будет оставаться равным нулю.

Если, в это время, на брусок железа воздействует внешнее магнитное поле, то большинство групп молекул будут выстраиваться в одном направлении. Случайные термальные силы все еще будут являться причиной изменений в магнитном поле, но пока внешнее поле будет оставаться тем же самым, а температура не будет выше критического уровня, большинство молекул будут оставаться выстроенными по направлению внешней силы.

Таким образом, модель Изинга предлагает удобную модель, которую можно применять к системам, состояние которых определяется уровнем внутренней кластеризации и воздействием внешних сил.

Теория социальной имитации. Теория социальной имитации стала известной после появления работы Е. Каллан и Д. Шапиро, чья статья «A theory of Social Imitation» вышла в свет в журнале *Physics Today* в 1974 году [4]. Стоит отметить, что отправной точкой данной теории можно считать работу Вольфранга Вейдлица [5]. Главная идея Вейдлица основывалась на предположении, что поведение индивидуумов в социальных группах (к которым можно отнести и рыб, плавающих в косяках, и полет птиц в стаях, и светлячков, мерцающих в унисон, и людей, подтвержденных тенденциям и настроениям моды) подобно молекулам в бруске железа. При некоторых условиях они ведут себя независимо друг от друга. В других случаях, мышление тех же самых индивидуумов поляризуется, то есть личности будут действовать как толпа, и индивидуальное рациональное мышление заменяется коллективным.

Как заметил еще в XIX веке Чарльз Маккей [6]: «Люди, как некто удачно выразился, мыслят стадом; вы узнаете, что стадом же они сходят с ума, а в

сознание приходят медленно и поодиночке». Таким же образом, брусок железа, подверженный влиянию магнитного поля достаточно продолжительное время, станет сильно поляризованным, и, только после прекращения влияния внешних факторов, медленно вернется к неполяризованному состоянию.

Фактически Вейдлик расширил хорошо известную модель ферромагнетизма Изинга на поляризацию мнения в социальных группах.

Гипотеза когерентного рынка. В 1990 году Тонис Веге в статье [2] предложил гипотезу когерентного рынка. За основу Веге взял теорию социальной имитации для моделирования поляризации общественного мнения. Он предположил, что существует связь между рыночной поляризацией и доходностью ценных бумаг.

Отметим, что в применении модели Изинга к моделированию доходностей финансовых инструментов, следует учесть некоторые особенности фондового рынка. В отличие от бруска железа, фондовый рынок представляет собой открытую систему, что предполагает непрерывный поток денежных средств для сохранения возможности фазовых переходов от «беспорядка» к более организованному состоянию. По аналогии, можно привести в пример лазер, нуждающийся во внешней накачке для поддержания непрерывного потока электронов для излучения света. Если поток энергии в лазере недостаточен, он будет излучать лишь слабый, «случайный» свет.

Можно предположить, что промышленные группы на фондовом рынке являются аналогами молекул в бруске железа, и что доходность рынка ценных бумаг пропорциональна различию между числом инвестиционных групп, торгующих на повышение, и числом, торгующих на понижение. Рыночные доходности могут беспорядочно колебаться около нуля (как в перегретом бруске железа), либо, при особых условиях, они могут демонстрировать высокую степень поляризации, которая сопровождается

большой разницей в доходности между инвесторами. В дальнейшем такие понятия как инвестор, трейдер, торговец будем считать синонимами.

Для переноса модели Изинга на рынки капитала предположим следующие допущения. Пусть n – число инвестиционных групп на финансовом рынке (число инвесторов). Мнение инвесторов, ожидающих рост котировок, можно обозначить, как «+» (будем называть его позитивным или бычьим), аналогично, мнение инвесторов, ожидающих падение котировок, обозначим как «-» (будем называть его отрицательным или медвежьим), при этом в любой момент времени инвестор может поменять свое мнение на противоположное. Обозначим $p_{+-}(n_+, n_-)$ вероятность изменения мнения с плюса на минус, а $p_{-+}(n_+, n_-)$ - вероятность изменения мнения с минуса на плюс. Необходимо выразить функцию распределения вероятностей $f(n_+, n_-, t)$.

Можно получить следующее кинетическое выражение [85]:

$$\begin{aligned} \frac{df[n_+, n_-; t]}{dt} = & (n_+ + 1)p_{+-}(n_+ + 1, n_- - 1)f[n_+ + 1, n_- - 1; t] + \\ & + (n_- + 1)p_{-+}(n_+ - 1, n_- + 1)f[n_+ - 1, n_- + 1; t] - \\ & - n_+ p_{+-}(n_+, n_-)f[n_+, n_-; t] - n_- p_{-+}(n_+, n_-)f[n_+, n_-; t] \end{aligned} \quad (1)$$

В этом уравнении суммируются все вероятностные переходы во мнениях инвесторов, произошедшие за короткий интервал времени Δt , относительно некоторого положения (см. рис. 1).

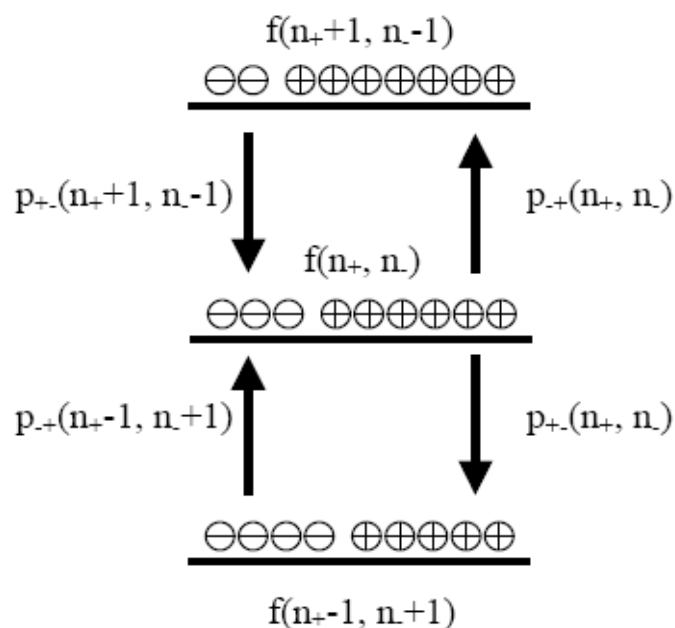


Рис1. Пример вероятностных переходов

Для описания преобладающей тенденции на рынке (позитивной или негативной) введем переменную q . Эта переменная отражает величину рыночной поляризации мнений участников рынка:

$$q = (n_+ - n_-) / 2n; q \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]. \quad (2)$$

Мы можем переписать распределение вероятностей, используя q и $\Delta q = \frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{\Delta q} w_{+-}(q) \equiv n_+ p_{+-}[n_+, n_-] = \frac{1}{\Delta q} \left(\frac{1}{2} + q \right) p_{+-}(q), \quad (3)$$

$$\frac{1}{\Delta q} w_{-+}(q) \equiv n_- p_{-+}[n_+, n_-] = \frac{1}{\Delta q} \left(\frac{1}{2} - q \right) p_{-+}(q). \quad (4)$$

Используя эти выражения, выражение (1) можно упростить:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(q, t)}{\Delta t} = & \frac{1}{\Delta q} w_{+-}(q + \Delta q) f(q + \Delta q, t) + \frac{1}{\Delta q} w_{-+}(q - \Delta q) f(q - \Delta q, t) - \\ & - \frac{1}{\Delta q} w_{+-}(q) f(q, t) - \frac{1}{\Delta q} w_{-+}(q) f(q, t) \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f(q,t) &= \frac{1}{\Delta q} w_{+-}(q) f(q,t) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\Delta q} w_{+-}(q) f(q,t) \Delta q \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left(\frac{1}{\Delta q} w_{+-}(q) f(q,t) \Delta q^2 \right) + \frac{1}{\Delta q} w_{+-}(q) f(q,t) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\Delta q} w_{-+}(q) f(q,t) \Delta q \right) - \\
&- \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left(\frac{1}{\Delta q} w_{-+}(q) f(q,t) \Delta q^2 \right) - \frac{1}{\Delta q} w_{-+}(q) f(q,t) - \frac{1}{\Delta q} w_{-+}(q) f(q,t) = \\
&= \frac{\partial}{\partial q} ((w_{+-}(q) - w_{-+}(q)) f(q,t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} ((w_{+-}(q) + w_{-+}(q)) f(q,t) \Delta q)
\end{aligned} \tag{6}$$

Определим $K(q)$ - коэффициент дрейфа, $Q(q)$ - коэффициент диффузии:

$$K(q) = [w_{-+}(q) - w_{+-}(q)], \tag{7}$$

$$Q(q) = [w_{+-}(q) + w_{-+}(q)] \Delta q. \tag{8}$$

В результате получим уравнение Фоккера-Планка для распределения вероятностей:

$$\frac{d}{dt} f(q,t) = - \frac{\partial}{\partial q} [K(q) f(q,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} [Q(q) f(q,t)]. \tag{9}$$

Это уравнения в частных производных решается интегрированием

$$f_{st}(q) = \frac{c}{Q(q)} \exp \left[2 \int_{-1/2}^q \frac{K(q)}{Q(q)} dq \right], \tag{10}$$

где c – это нормирующая константа.

Как было указано выше, Вейдлик по аналогии между поведением индивидуумов в социальных группах и поведением молекул в ферромагните сделал предположение о вероятностях переходов $p_{+-}(q)$ и $p_{-+}(q)$. Он предположил, что индивидуумы подвергаются воздействию двух сил: силе внутреннего взаимодействия между самими индивидуумами и силе влияния внешних окружающих условий.

Сопоставляя мнения «+» или «-» с направлением спина, аналогично с моделью Изинга, вероятностные переходы экспоненциально зависят от влияния вышеописанных двух сил и равны:

$$p_{+-}[n_+, n_-] \equiv p_{+-}(q) = \alpha \exp \left\{ \frac{-(Iq + H)}{\Theta} \right\} = \alpha \exp[-(kq + h)], \tag{11}$$

$$p_{-+}[n_+, n_-] \equiv p_{-+}(q) = \alpha \exp\left\{\frac{+(Iq + H)}{\Theta}\right\} = \alpha \exp[+(kq + h)], \quad (.12)$$

где I – мера способности к адаптации по отношению к соседям; H – параметр предпочтительного мнения ($H > 0$ показывает, что положительное мнение предпочитается отрицательному); Θ – коллективный параметр общественного мнения (в физике соответствует параметру $k_B T$, где k_B – постоянная Больцмана, T – температура); α – частота процессов «перескоков».

Используя выражения (3.7) и (3.8) можно получить:

$$K(q) = \alpha [\sinh(kq + h) - 2q \cosh(kq + h)], \quad (13)$$

$$Q(q) = \frac{\alpha}{n} [\cosh(kq + h) - 2q \sinh(kq + h)]. \quad (14)$$

По аналогии с моделью Изинга при подстановке численных значений (13) и (14) в (10) можно получить два типичных результата. Первый соответствует высокотемпературному пределу, и возникает из-за частых перемен мнения при низкой адаптации индивидуумов $k \ll k_{\text{критического}}$, таким образом, получается одноцентровое распределение мнений (q будет колебаться около нуля). Другая ситуация возникает, когда параметр социального климата Θ уменьшается, или же константа связи между инвесторами увеличивается, возникает две группы мнений которые и описывает «поляризацию» рынка.

Распределение рыночных доходностей $f(q)$ Веге сопоставил с распределением вероятностей поляризации и дал следующую интерпретацию управляющих параметров системы:

h – фундаментальное смещение (результат влияния внешних экономических условий). Параметр варьируется от -0,02, что соответствует негативным окружающим условиям (то есть тем, влияние которых потенциально может уменьшать стоимость ценных бумаг, что может привести к медвежьему рынку), до значения +0,02, соответствующего

позитивным окружающим условиям (соответственно, это такие условия, влияние которых потенциально может увеличить стоимость ценных бумаг, что может привести к бычьему рынку). Значения, лежащие около нуля, соответствуют нейтральной экономической ситуации.

k – рыночные настроения или показатель степени согласованности инвесторов (в [67] – «показатель поведения толпы»). Параметр может принимать значения от 1,8 до 2,2. При этом $k=1,8$ соответствует полностью случайному временному ряду. Ситуацию, когда k принимает значения от 2 и более, назовем «Режимом толпы».

N – число степеней свободы, или количество участников рынка. Будем называть участником рынка – группу инвесторов со сходными инвестиционными действиями и ожиданиями относительно дальнейшего направления рынка. Данный параметр Вега предполагает фиксированным и равным 186 (количество промышленных групп).

Влияние изменений управляющих параметров на вид функции плотности вероятности. Нами написаны программы в пакете математической обработки данных позволяющие эффективно исследовать математическую модель, соответствующую СМН. Одна из программ рассчитывает и строит кривую функции плотности вероятности (10) при изменяющихся управляющих параметров.

Фазы рынка. Изменение управляющих параметров меняет форму функции вероятности (10). Комбинация значений параметров системы дает основные рыночные состояния (фазы рынка):

1. Эффективный рынок, то есть рынок, в котором финансовые инструменты ведут себя как случайный временной ряд, и, следовательно, такой рынок не может быть прогнозируемым. В этом случае инвесторы действуют независимо друг от друга, и информация мгновенно отражается в ценах.

2. Переходные состояния рынка. Возникают из-за возрастания «группового сознания», то есть происходит некое смещение в настроениях инвесторов.

3. Хаотический рынок. Рынок, на котором финансовые инструменты обладают «долгосрочной памятью». Настроения инвесторов в данном случае характеризуются тем, что быстро распространяются в «групповом сознании», а фундаментальные условия нейтральны или еще не определены.

4. Когерентный рынок, в котором обозначены фундаментальные тенденции, и, кроме того, как и в случае 3, присутствует «долговременная память». Это часто трендовые рынки с низким риском для получения прибыли.

На рис.2 проиллюстрирована зависимость рыночного состояния от преобладающего настроения инвесторов и фундаментальных экономических условий по аналогии с Бостонской матрицей, характеризующей тип предприятия. Ниже критического переходного порога (при $k=2$) на рынке преобладает состояние случайного блуждания и быстрой смены настроений на рынке. Выше переходного порога, в случае если фундаментальные данные позитивны, проявляется когерентный бычий рынок, если фундаментальные данные негативны, то можно увидеть когерентный медвежий рынок. Когда фундаментальные данные не обеспечивают чистого направления для инвесторов, получаем хаотический рынок.



Рис. 2. Зависимость рыночного состояния от h и k

Таблица 1 представляет теоретические ожидаемые доходности и стандартные отклонения для различных комбинаций управляющих параметров. При одинаковых изменениях в фундаментальных данных h , происходит нелинейное изменение ожидаемых доходностей. В случае случайного блуждания влияния изменений в фундаментальных данных значительно меньше, чем в период режима толпы. На когерентных рынках величина ожидаемой доходности более чем в два раза превышает значение стандартного отклонения, это наблюдение дает количественный способ определения когерентного режима на рынках капитала.

Т а б л и ц а 1

Теоретические ожидаемые доходности и стандартные отклонения для различных комбинаций управляющих параметров

Фаза рынка	ППТ (k)	Фунд. условия	Ожидаемая доходность	Стандартное отклонение
Случайное блуждание	1,8	+0,02	8	10
	1,8	0	0	10
	1,8	-0,02	-8	10
Переходные состояния	2,0	+0,02	14	12

	2,0	0	0	16
	2,0	-0,02	-14	12
Когерентный бычий рынок	2,2	+0,03	+27	8
	2,2	+0,02	+25	11
Хаотический рынок	2,2	+0,01	16	18
	2,2	+0,005	+10	21
	2,2	0	0	23
	2,2	-0,005	-10	21
	2,2	-0,01	-16	18
Когерентный медвежий рынок	2,2	-0,02	-25	11
	2,2	-0,03	-27	8

Ситуация случайного блуждания. Функция плотности вероятностей (10) может быть значительно упрощена, если поведение инвесторов не является групповым, то есть когда $k < 2$. Если предположить, что фундаментальные данные нейтральны (то есть $h=0$), то функция может быть выражена в следующей форме:

$$f(q) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{q^2}{\sigma^2}}. \quad (15)$$

Таким образом, мы получаем плотность вероятности нормального закона распределения, отражающее состояние истинного случайного блуждания (рис. 3).

Доходности рыночного индекса q могут быть рассмотрены как частица, попавшая в потенциальный колодец под действием случайных сил. Колодец будет иметь форму симметричной чаши с дном около нуля. Это отражает действие случайных сил на частицу, влияние которых быстро ослабевает, и она возвращается на дно. Теоретически, случайные блуждания на рынках капитала, в зависимости от фундаментальных данных, могут вызвать как незначительные стабильные прибыли, так и незначительные стабильные убытки. Как замечает Вега, исторически, тем не менее, случайное блуждание на рынках сопровождается, в силу транзакционных издержек, стабильными

незначительными убытками и наиболее часто ассоциируется с медвежьими рынками.

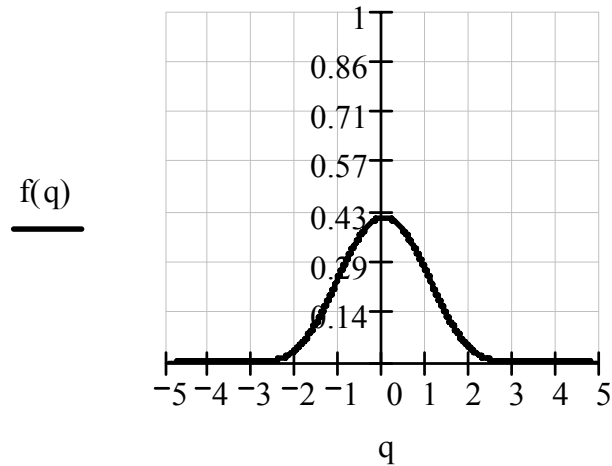


Рис. 3. $N=220$ $h=0$ $h=0$

Переход к режиму толпы. В случае небольшого возрастания k до 2 (величина критического переходного порога) при неизменных фундаментальных условиях ($h \approx 0$), дисперсия в уравнении (3.10) становится очень большой, и нормальное распределение для плотности вероятности доходностей рынка (как и модель случайных блужданий) больше не применима. Функция плотности вероятности становится более широкой и плоской. Мы получаем ситуацию неустойчивого перехода (рис.4)

Если на рынке со случайным блужданием движение частицы в потенциальном колодце резко затухает, что означает, что эффекты от случайных воздействий на частицу будут быстро дисконтированы, то при возрастании k , частица начинает свободно колебаться от одного крайнего положения в другое внутри потенциального колодца. Это предполагает высокую неэффективность рынка, на котором можно ожидать большие и продолжительные перемещения в настроениях инвесторов. На рынке присутствует «долговременная память» (таким образом, информация не обесценена), имеются тренды, и они сохраняются, пока новая информация не изменит их.

На рис.4 изображена кривая вероятностного распределения, которая соответствует ситуации неустойчивого перехода от случайного блуждания к рынку, на котором присутствует режим толпы. Потенциальный колодец при переходе к режиму толпы будет иметь почти горизонтальное дно на широком диапазоне ожидаемых доходностей. В этот период неустойчивости может случиться все что угодно.

Это случай, когда на рынке присутствуют нейтральные фундаментальные новости, в тот же момент незначительное смещение в характере фундаментальных новостей может привести к скосу кривой распределения в сторону этого смещения.

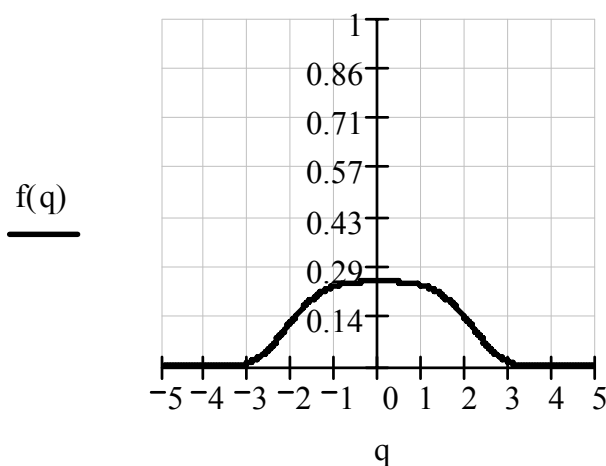


Рис. 3.4. $N=220$, $h=0$, $k=2$

Хаотические рынки. Когда показатель поведения толпы k превышает величину критического уровня $k_{крит}=2$, а фундаментальные данные нейтральны либо очень малы ($h \approx 0$), модель Изинга будет демонстрировать двойное дно потенциального колодца и соответственно бимодальную функцию распределения вероятностей (любая позитивная или негативная информация может привести к радикальным переменам, это и отражает функция плотности вероятности образуя две вершины). Проявляется высокий уровень поляризации среди инвесторов, но при отсутствии сильного фундаментального смещения им трудно выявить четкое направление, в

сторону которого могла бы двигаться толпа, будь то в медвежьем либо бычьем тренде.

За недостатком фундаментальной информации инвесторы отслеживают действия друг друга, поэтому любые слухи могут стать причиной паники, вероятно возможность внезапного смещения в направлении с бычьего в медвежье или наоборот. Вероятность сильного смещения в настроениях инвесторов увеличивается, когда преобладающее направление инвесторского настроения идет вразрез с направлением внешнего смещения в фундаментальных данных.

Как пример, можно привести период, предшествующий краху американского фондового рынка в 1987 году. В это время на рынке наблюдался режим толпы. Фундаментальные экономические условия были нейтрально-медвежьи ($h=-0,005$) и объяснялись монетарной политикой, которую проводила Федеральная Резервная Система.

На протяжении последних 6 лет процентная ставка постепенно сокращалась с 14 до 5,5%, на этом уровне в 5,5% ставка оставалась первые 8 месяцев 1987 года. К этому моменту рынок поднялся более чем на 25% за последний год, и на рынке преобладал бычий настрой инвесторов. И вот 4 сентября 1987 г. появилась сильная негативная новость для финансовых рынков – ФРС повышает учетную ставку на 0,5% и ясно показывает намерение проводить в дальнейшем сдерживающую монетарную политику.

На рис. 3.5 показано вероятностное распределение, относящееся к периоду, предшествовавшему Кризису 1987 года.

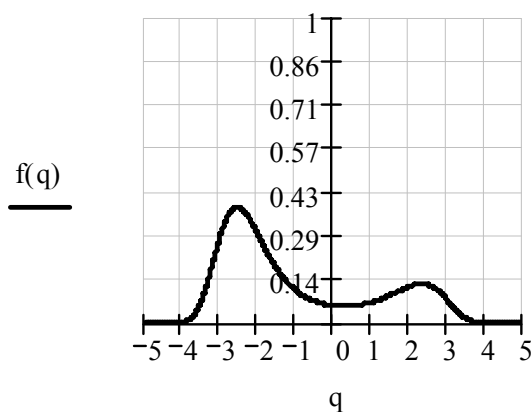


Рис. 5. $N=220$, $h=-0.005$, $k=2.2$

На рис. 6 изображено движение индекса SP500, соответствующее этому распределению

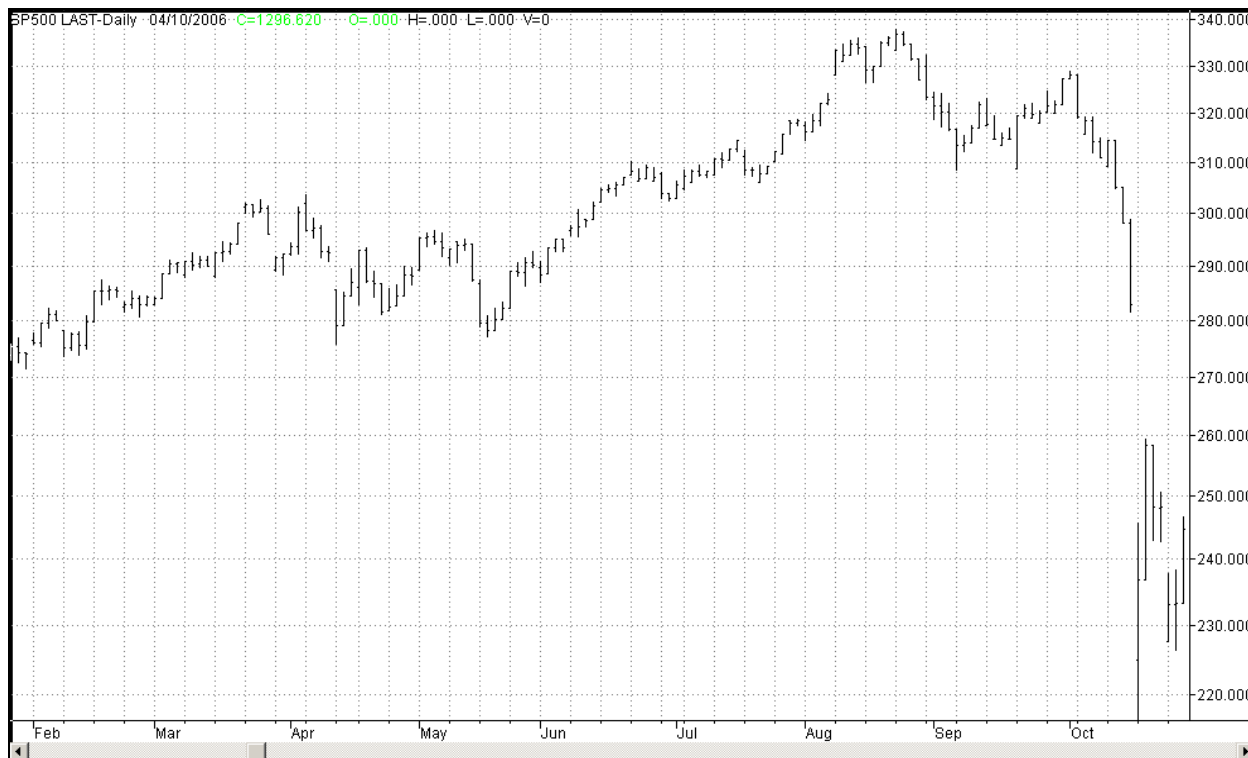


Рис 6. Пример фазы «хаотического рынка» индекса S&P500 1987г.

По функции плотности вероятности видно, что вероятность бычьего состояния рынка остается еще вполне возможной, и, более того, на рынке присутствует режим толпы, тем не менее, на режим толпы наложились медвежьи фундаментальные новости, а это может вызвать потенциально опасную ситуацию. Даже незначительные негативные импульсы могут направить частицу (рыночную доходность) через небольшой барьер в центре потенциального колодца в более вероятное состояние чистого медвежьего настроя и отрицательной доходности. Специфические новости, предшествовавшие краху, были менее важны как причина, нежели преобладающая комбинация настроя инвесторов и фундаментального смещения в данных.

Хаотический рынок может быть описан как квази-эффективный. Пока на рынке присутствует режим толпы, любое направление движения в

котировках ценных бумаг может быть устойчивым, если поддерживается хотя бы слабыми новостями, «подогревающими» движение в этом направлении. Такая ситуация существовала в первые 8 месяцев 1989 года, когда хорошие новости отражались в высоких рыночных ценах, а плохие, наоборот, в низких.

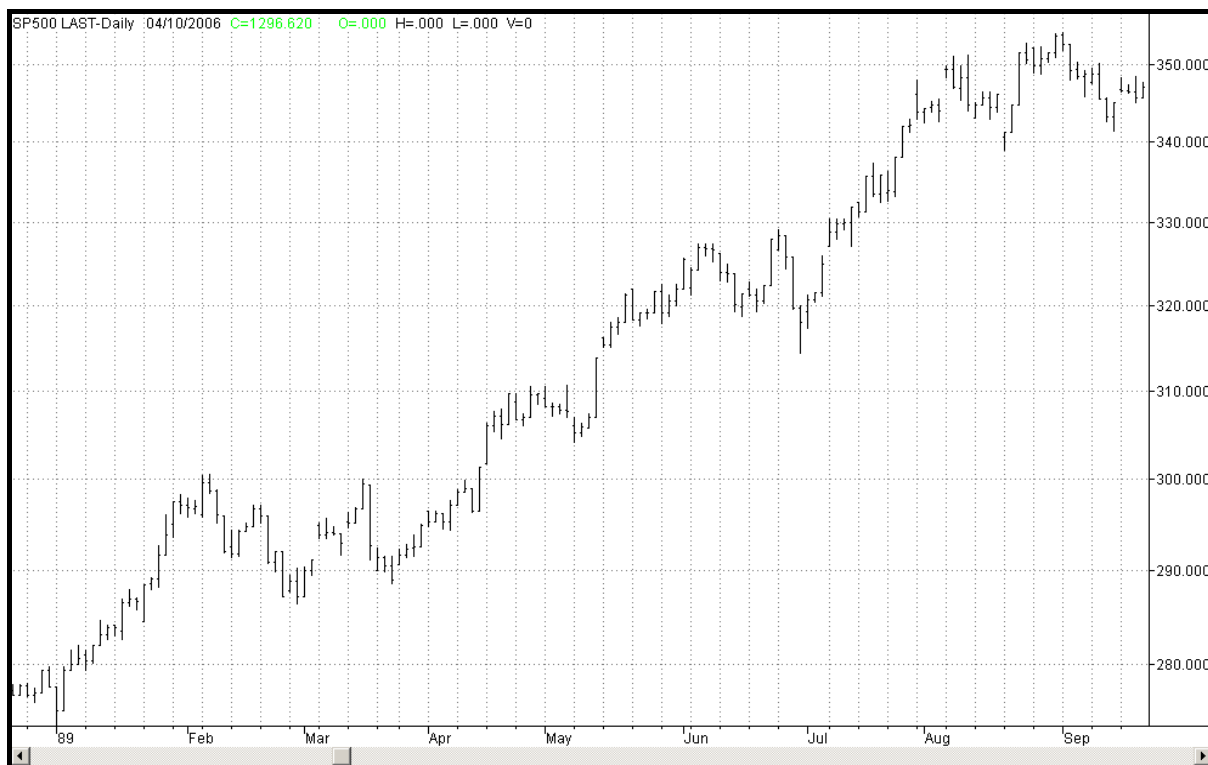


Рис. 7. Пример фазы «хаотического рынка» индекса S&P500 1989г.

В то же самое время, необходимо быть осторожным, так как высокое стандартное отклонение, связанное с распределением вероятностей на рис. 5, отражает высокую степень риска на хаотическом рынке.

Когерентный бычий рынок. Когда сильные позитивные фундаментальные данные ($h \gg 0$) накладываются на режим толпы ($k > 2$)— ситуация благоприятствует развитию когерентного бычьего рынка. Такой рынок может быть рассмотрен как хаотический рынок, на котором медвежья сторона потенциального колодца высока, и соответствующая ей пропорция вероятностного распределения уменьшается.

На рис. 8 представлена функция плотности распределения когерентного бычьего рынка. Распределение имеет достаточно длинный хвост, уходящий

далеко в отрицательную часть. Модель показывает, что, несмотря на бычьи условия, все же остается небольшая вероятность получения на рынке убытков. На таком рынке риск потерь низок, и общая волатильность падает. Данные условия как нельзя более подходят для совершения покупок ценных бумаг.

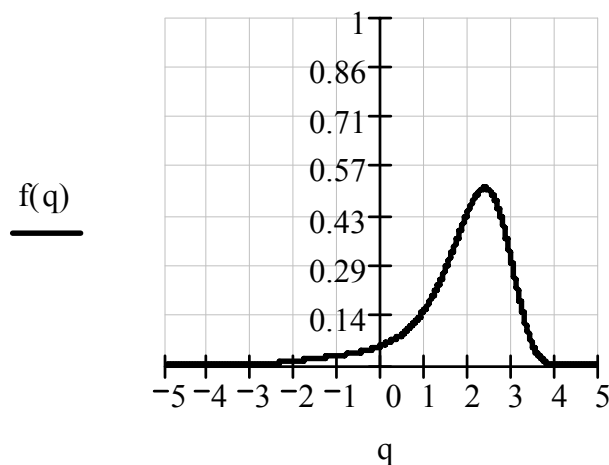


Рис. 8. $N=220$, $h=0.02$, $k=2.1$

Типичный пример когерентного рынка можно наблюдать, когда возрастают свободные денежные накопления. Для поддержания бычьего когерентного рынка необходимо поступление свободных денежных средств (по аналогии – для лазера для поддержания достаточного количества высокоэнергетических электронов для излучения света, необходима внешняя накачка). Поэтому часто когерентные рынки можно наблюдать, тогда, когда величина денежных резервов очень высока.

Для примера, на российском фондовом рынке многие практикующие трейдеры обращают внимание на остатки денег коммерческих банков на корреспондентских счетах в Центральном банке. Фактор избыточной ликвидности является сигналом того, что часть этих денег может пойти на фондовый рынок и поддержит рост котировок.

Как отмечает Веге, большая часть долгосрочной рыночной прибыли получается благодаря когерентным рынкам. Когда когерентный рынок

заканчивается и наступает состояние хаотического рыка или случайного блуждания, слишком поздно надеяться на получение дохода от инвестиций.

Когерентные медвежьи рынки. Когерентные медвежьи рынки появляются, когда на рынке присутствуют сильные негативные фундаментальные данные ($h \ll 0$) вкупе с поведением инвесторов в режиме толпы ($k > 2$). По сути, это зеркальное отражение когерентного бычьего рынка. Когерентный медвежий рынок может быть рассмотрен как хаотический рынок, на котором бычья сторона потенциального колодца высока и соответствующая ей пропорция вероятностного распределения уменьшается. Стандартное отклонение такое же, как и у когерентного бычьего рынка, однако ожидаемый убыток сходен с аналогичной прибылью на бычьем рынке. Хорошим примером когерентного медвежьего рынка может быть крах 1929 года на американском фондовом рынке, который длился несколько лет.

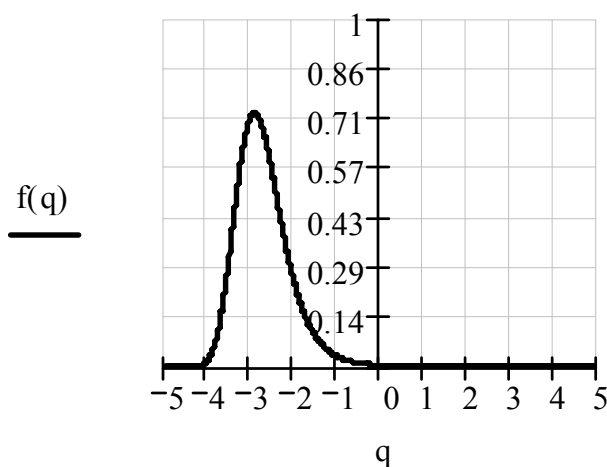


Рис. 3.9. $N=220$, $h=-0.03$, $k=2.2$

На рис. 9 приведен пример подобного рынка. Функция плотности вероятности сильно скошена влево, но остается длинный положительный хвост, указывающий на то, что дни положительных доходностей рынка остаются возможными, даже если их вероятности очень малы. Положительные фундаментальные новости могут иметь меньший эффект на рынок, чем отрицательные той же величины. На таких рынках, совершая

короткие продажи, трейдер может получить прибыль сравнимую с доходностью при инвестировании на бычьем рынке.

2. Разработка способов подсчета характеристик модели Веге-Изинга

Веге предполагал, что мы не сможем точно узнать значения параметров k и h , и даже узнать, положительны ли они, нейтральны или отрицательны [155]. Тем не менее, нам удалось предложить метод, позволяющий достаточно точно определить значения управляющих параметров, и, кроме того, показать, что число степеней свободы рынка зависит от его фазы.

Мы предположили, что существует связь между показателем настроя толпы k и показателем Херста H . Эту связь можно выразить соотношением

$$H = k - 1.3. \quad (3.16)$$

Действительно, в случае $k=1,8$, то $H=0,5$ – мы получаем случайный рынок. Если k возрастает и равно 2, то возрастает и Херст =0,7, что означает присутствие на рынке «режима толпы».

Таким образом, показатель настроения толпы вычисляется достаточно легко, так как существует несколько надежных способов расчета показателя Херста [64-67, 96]. Для расчета числа степеней свободы рынка и показателя фундаментального смещения h нами использовались процентные приращения дневных значений индекса S&P500 за период с января 1998 года по август 2004 года. Вся совокупность данных была разбита по 2-месячным интервалам, и далее, путем подгонки уравнения (3.10) для каждого интервала были найдены соответствующие значения параметров k , h , N .

Для определения числа степеней свободы рынка был получен следующий график (см. рис. 10):

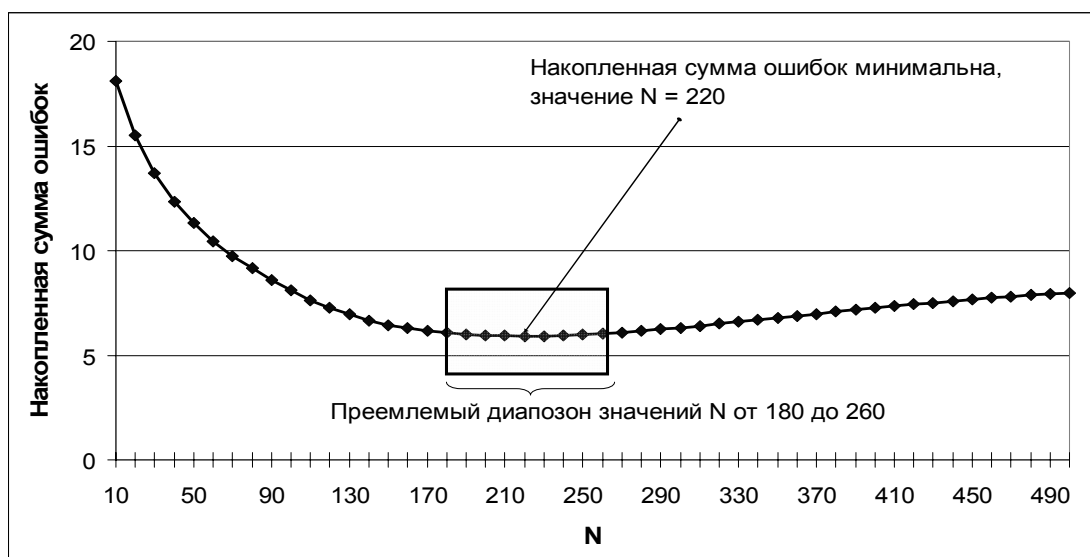


Рис. 10. Определение числа степеней свободы рынка

На основе минимизации ошибок системы (10) предлагается следующее уравнение регрессии зависимости величины фундаментального сдвига h от макроэкономических индикаторов (рис. 11.):

R= ,85676209 R^2= ,73404128 Adjusted R^2= ,66016386 F(10,36)=9,9359 p<,00000 Std. Error of estimate: ,00293						
N=46	Beta	Std. Err. of Beta	B	Std. Err. of B	t(36)	p-level
MO	-17,1411	6,73938	-0,00000023648	0,000000	-2,54343	0,015416
CU	-26,3226	10,97135	-0,00166869318	0,000696	-2,39922	0,021732
Цеп. ин. PI	108,2923	15,90365	0,53930429832	0,079201	6,80927	0,000000
Цеп. ин. PPI	-23,9421	10,58328	-0,11958131390	0,052859	-2,26226	0,029814
Цеп. ин. HS	-6,0496	2,23887	-0,03021698679	0,011183	-2,70208	0,010444
UR^2	10,7162	5,14780	0,00000000025	0,000000	2,08170	0,044540
CPI^2	-35,4460	13,23165	-0,00000576533	0,000002	-2,67888	0,011064
UR*MO	26,7427	6,38410	0,00000000187	0,000000	4,18895	0,000173
UR*PI	24,9752	7,34690	0,00000000002	0,000000	3,39943	0,001664
GDP*M2MS	-61,4600	11,23506	-0,00000019373	0,000000	-5,47038	0,000004

Рис. 11. Итоги регрессии для определения константы фундаментального сдвига h

MO- Manufacturers' New Orders: Durable Goods;

CU- Capacity Utilization; PI - Personal Income (цепной индекс);

PPI - Producer Price Index: All Commodities (цепной индекс);

HS - Housing Starts: Total: New Privately Owned Housing Units Started (цепной индекс);

UR - Unemployment Rate;

CPI - Consumer Price Index For All Urban Consumers: All Items;

IPI - Industrial Production Index;

GDP - Gross Domestic Product;

M2*MS - M2 Minus*M2 less small time deposit.

Как видно из результатов моделирования, все коэффициенты уравнения регрессии статистически значимы, значимо и само уравнение регрессии для вычисления фундаментальной постоянной h .

При тщательном исследовании функции (10) применительно к дневным доходностям индекса SP-500 оказалось, что найденный диапазон числа степеней свободы рынка 180-220 является усредненным по всем состояниям рынка. То есть в среднем число участников рынка SP500 можно считать равным 220. Заметим, что значение степени свободы рынка интуитивно предложенное Веге и равное 186 - попадает в приемлемый диапазон значений. Но мы считаем не верным следующие предположения, высказанные Веге [2] и повторенные Петерсом [7]. Первое, что N является постоянной, и второе, что «равенство $N=186$ или какому-либо другому числу не является существенным». Мы считаем, что в зависимости от состояния рынка число степеней свободы сильно изменяется. Было получено следующее уравнение зависимости N от других управляющих параметров модели:

$$N = -27666k - 12560|h| + 64278 \ln(k) + \frac{22381}{k}. \quad (3.17)$$

Regression Summary for Dependent Variable: n (Данные для поиска зависимости N от h и k1. sta)						
R= ,89152356 R^2= ,79481425 Adjusted R^2= ,77263201						
F(4,37)=35,831 p<,00000 Std.Error of estimate: 110,93						
N=41	Beta	Std.Err. of Beta	B	Std.Err. of B	t(37)	p-level
k	-228,691	107,0521	-27766,4	12997,65	-2,13626	0,039339
modh	-0,289	0,1359	-12559,9	5903,81	-2,12743	0,040113
LN-V4	179,605	84,3672	64278,9	30194,19	2,12885	0,039988
1/V4	50,318	22,7717	22381,5	10128,78	2,20969	0,033394

Рис. 12. Итоги регрессии для определения N

Отметим, что все коэффициенты уравнения статистически значимы, значимо и само уравнение. При этом средняя ошибка прогноза = 110,93.

Оказывается, с увеличением фундаментального дрейфа рынка и постоянной Херста, уменьшается число степеней свободы рынка. Зависимость от фундаментальной составляющей линейная, а в зависимости от постоянной Херста присутствуют нелинейные эффекты ослабляющие линейную зависимость. Получается, что если на рынке нейтральные фундаментальные данные (тем самым отсутствуют значимые инвестиционные идеи) и слабый настрой толпы, то количество степеней свободы рынка - максимально. На рынке много групп (их количество может достигать 500), каждая из которых проводит свою инвестиционную политику с разным временным горизонтом, и в среднем, влияния их на рынок нивелируется, рынок дрейфует в «боковом тренде». В периоды же когерентных рынков (то есть когда есть сильные позитивные или негативные данные вкупе с поведением инвесторов как толпы) число участников рынка сокращается и может уменьшиться даже до 5-20. Это можно объяснить их объединением в большие группы. В период сильных бычьих трендов, равно как и в период сильных медвежьих, ситуация инвесторам, как правило, понятна и вопроса: что делать – покупать или продавать не стоит, количество мнений уменьшается, тем самым уменьшается и количество групп игроков.

На больших интервалах времени (в данном случае мы имели дело с дневными доходностями на двухмесячных интервалах) влияние фундаментальных данных очевидно. Логично задаться вопросом, насколько сильно влияют фундаментальные данные на меньших масштабах времени, например, если использовать часовые доходности, или даже 5-минутные. И более того, от чего в данных случаях будет зависеть число участников рынка?

В попытке ответить на эти вопросы, во многом имеющие теоретический интерес и раскрывающие для нас особенности поведения рынков внутри торгового дня, мы провели соответствующие исследования.

Для часовых данных были использованы котировки SP500 за весь 2003 год (всего получилось 1600 значений). Проведя анализ, обнаружилось, что накопленная сумма ошибок отклонения функции плотности вероятности доходностей (10) от гистограммы распределения дневных доходностей будет минимальна при $N=500$. Получается следующее уравнение зависимости N от других управляющих параметров:

$$N = 28655k - 14184\sqrt{k} - 15300k^2. \quad (18)$$

При этом стандартная ошибка прогноза равна 122,48.

Для 5-минутных доходностей индекса SP500 (июль-август 2003 года) были получены схожие результаты. Уравнение зависимости N от управляющих параметров оказалось простой линейной зависимостью от k

$$N = 732k. \quad (19)$$

Обратим внимание, что стандартная ошибка прогноза уменьшилась относительно регрессии на часовых данных и равна 71,24.

Итак, на число участников рынка на часовых и 5-минутных данных экономические фундаментальные факторы влияния не оказывают. Рынок полностью зависит от показателя поведения толпы. Вся совокупная группа инвесторов является разобщенной.

Кроме того, если сравнить разброс фундаментального смещения h на рядах дневных, часовых и пятиминутных доходностей, то мы получим следующий результат (см. табл. 2):

Т а б л и ц а 2

Сравнение h

Стандартное отклонение h дневных доходностей	0,051
Стандартное отклонение h часовых доходностей	0,023
Стандартное отклонение h 5-мин. доходностей	0,018

Мы видим, что разброс h при переходе к меньшим масштабам времени уменьшается. Это подтверждает наш вывод, что фундаментальные данные на малых промежутках времени перестают учитываться, и в основном, число

участников рынка, как и поведение рынка в целом, зависит от показателя поведения толпы. Этим можно объяснить эффективность применения технического анализа для внутридневной торговли. Полученный вывод позволяет говорить о том, что для трейдеров, чей временной горизонт торговли простирается на месяцы, для успешной торговли одного технического и статистического анализа будет недостаточно и обязательно надо учитывать результат внешних экономических условий. Таким образом, гипотеза когерентного рынка дает удобную модель для изучения изменяющихся состояний рынка и, кроме того, позволяет более качественно разобраться в его структуре.

3 Тестирование системы торговли, основанной на распознавании фазы рынка

Основной вопрос, который стоит перед трейдером, можно озвучить так: «В каком состоянии находится рынок в данный момент»? Так как от правильного распознавания текущих условий зависят, в первую очередь, применяемые инструменты анализа. В случае если трейдер использует в своей работе технический анализ - это выбор между трендовым или флэтовым анализом, или вообще, решением пока не торговать. Для ответа на данный вопрос и может помочь инструментарий СМН.

Ниже будет предложена простая система торговли, основанная на распознавании фазы рынка. Основная идея системы основана на избегании периодов, когда рынок ведет себя как случайный или хаотический, и попытке инвестировать только тогда, когда поведение рынка напоминает когерентное. Параметры рынка были подсчитаны для коротких, двухмесячных периодов времени, что накладывает некоторые условия на применение теории когерентных рынков. Так, на таких коротких периодах, показатель Херста (а значит и показатель поведения толпы) редко превосходит величину равную 0,7 (для k соответственно 2), кроме того, само количество данных для подсчета (в среднем 40 торговых дней) не может давать действительно точную оценку этого показателя. Тем не менее, значение H колеблющееся

около 0,5 - явное свидетельство о том, что рынок в данном периоде подобен случайному. А значение H близкое к 0,6 показывает, что на рынке присутствует неэффективность, то есть можно ожидать большие и продолжительные перемещения в настроениях инвесторов, а вкупе с положительными или отрицательными фундаментальными условиями и тренды (соответственно бычий или медвежий).

Введем следующие торговые правила:

- Покупка, когда $H > 0,58$ и $h > 0,002$;
- Продажа, если h становится отрицательным или нейтральным;
- Продажа, если H приближается к 0,5.

Значения H и h выбраны путем оптимизации стратегии.

Параметры модели вычислялись лишь для последовательных двухмесячных промежутков времени. Тем самым, условия торговли по этой системе менее удобны, чем могли бы быть. Это объясняется тем, что экономические новости на каждом двухмесячном промежутке времени выходят не все сразу в один день, а приблизительно равномерно в течение всего периода, да и показатель Херста постепенно меняется каждый новый день с появлением новых цен, и было бы логично отслеживать изменения этих показателей, используя соответствующие формулы (3.16 и рис. 3.11.), после каждого рабочего дня (или раз в несколько дней).

Это замечание может являться отправной точкой для дальнейших исследований систем, построенных на гипотезе когерентных рынков. Реакцию предложенной нами системы можно считать запоздалой, тем не менее, продемонстрируем результаты торговли даже по этой простой системе:

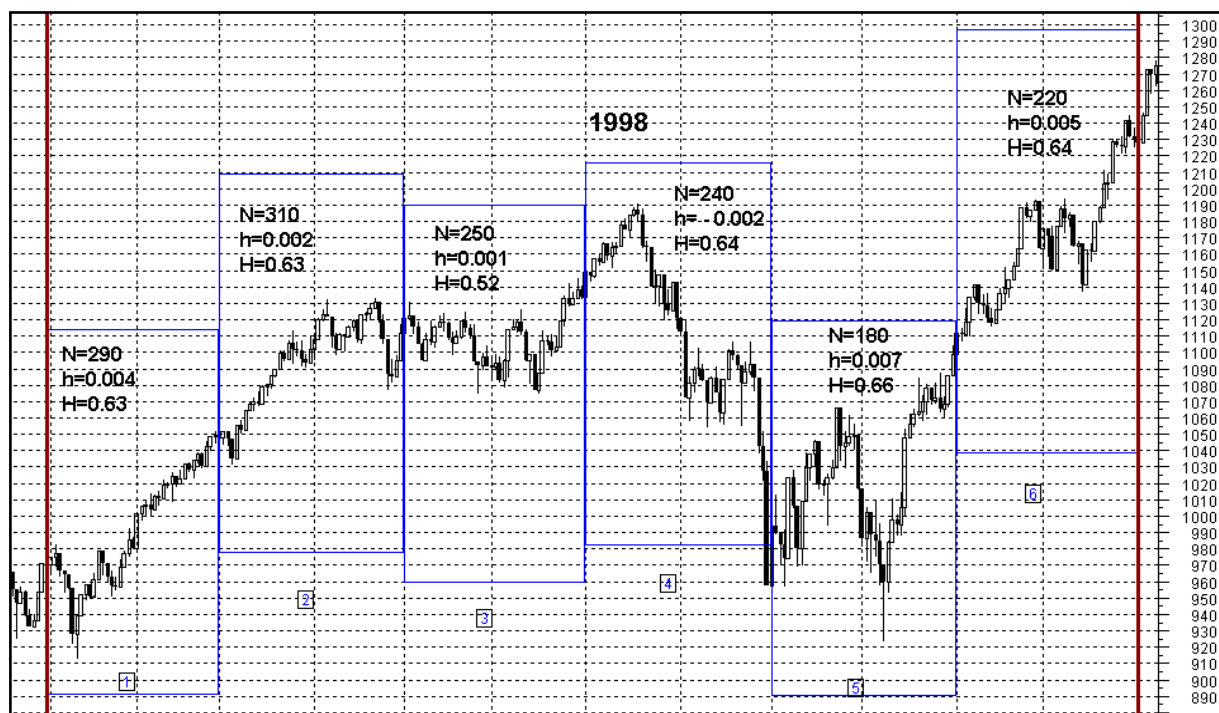


Рис. 13. Индекс S&P500, 1998г.¹

1. 01-02.1998г. N=290, h=0,004, H=0,63.

Мы видим положительные фундаментальные условия и достаточно высокое значение показателя Херста. В конце января принимаем решение о покупке индекса по цене 1049,34.

2. 02-04.1998г. N=310, h=0,002, H=0,63.

Удерживаем позицию.

3. 05-06.1998г. N=250, h=0,001, H=0,52.

Рынок находится в фазе случайно блуждания. Данное состояние рынка вкупе с нейтральными экономическими условиями дает сигнал к закрытию позиции 1133.84.

4. 07-08.1998г. N=240, h=-0,002, H=0,64.

Вне рынка.

5. 09-10.1998г. N=180, h=0,007, H=0,66.

Весьма хорошие фундаментальные условия и сильный настрой толпы. Покупка в конце октября 1098,67.

6. 11-12.1998 N=220, h=0,005, H=0,64.

¹ Здесь и далее рисунки созданы при помощи программы технического анализа данных Metastock Professional 6.0

Удерживаем позицию.

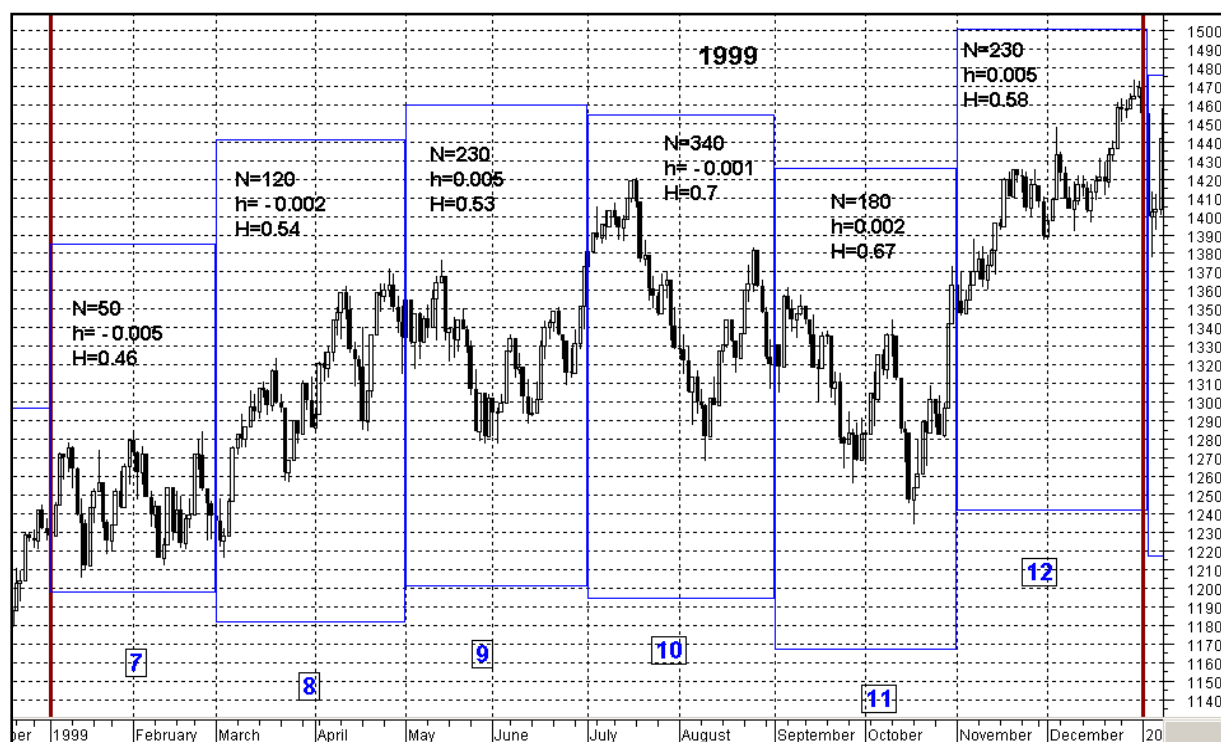


Рис. 14. Индекс S&P500, 1999г.

7. 01-02.1999г. N=50, h=-0,005, H=0,46.

Интересный с точки зрения анализа диапазон. Здесь явно прослеживается сильная «борьба медведей с быками». На пользу дальнейшего падения рынка свидетельствуют негативные фундаментальные данные и разворотная фигура технического анализа «Тройная вершина». Толпа была разбита на количество рыночных групп (N=50), заметно уступающее стандартному значению (N=220), кроме того, у толпы не было единого настроения (H=0,46), что, в конечном итоге, и не дало вылиться в медвежий тренд с пробитием уровня 1210. Тем не менее, закрываем позицию 1238,33.

8. 03-04.1999г. N=120, h=-0,002, H=0,54.

Фаза «Случайного блуждания». Рынок все еще не сформировал единого мнения. Без позиций.

9. 05-06.1999г. N=230, h=0,005, h=0,53.

Фаза «Случайного блуждания». Без позиций.

10. 07-08. 1999г. $N=340$, $h=-0,001$, $H=0,007$.

Сильный настрой толпы, наложенный на нейтральные слабые фундаментальные данные, дал хаотический, высокорискованный рынок. Без позиций.

11.09-10.1999г. $N=180$, $h=0,002$, $H=0,67$.

Согласно правилу №2 изменение знака h и высокое значение H дают сигнал к покупке в конце октября по 1342,44.

12.11-12.1999г. $N=230$, $h=0,005$, $H=0,58$.

Удерживаем позицию.

13.01-02.2000г. $N=120$, $h=0,004$, $H=0,54$.

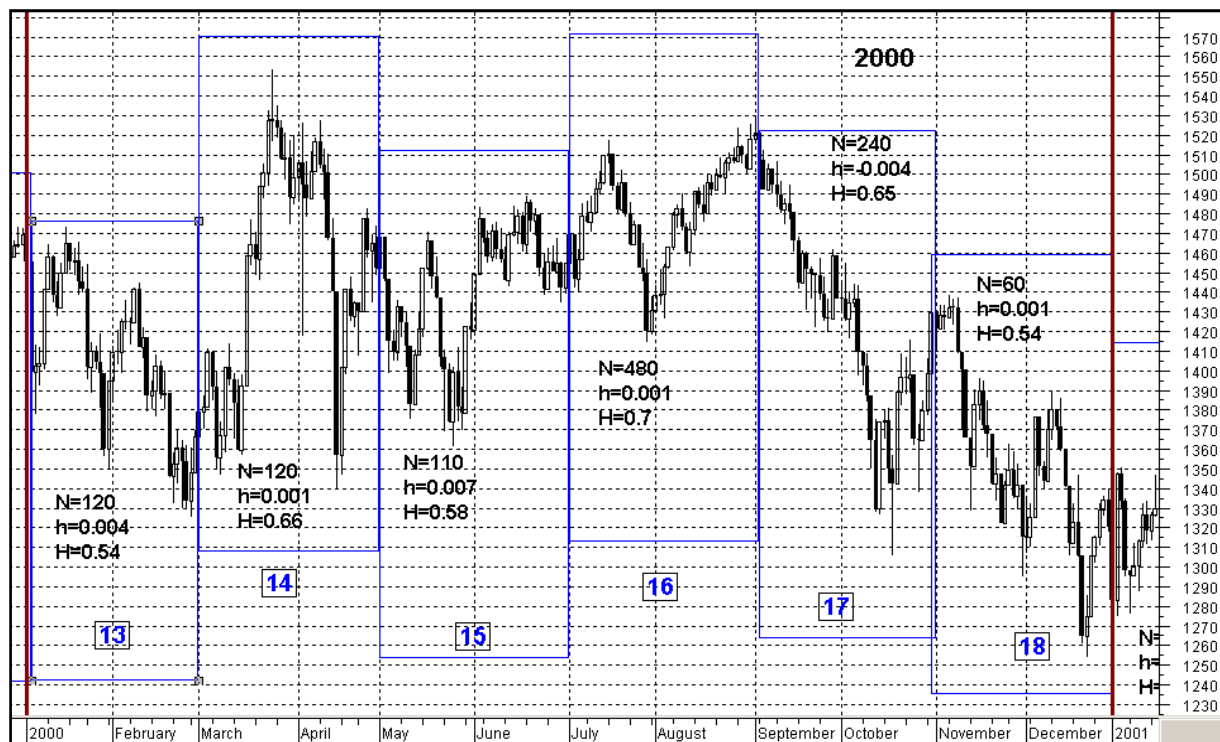
Несмотря на неплохие фундаментальные факторы рынок в «случайной» фазе. Не рискуем и продаем актив по 1366,42.

14.03-04.2000г. $N=120$, $h=0,001$, $H=0,66$.

Хаотичный рынок. Без позиций.

15.05-06.2000г. $N=110$, $h=0,007$, $H=0,58$.

Сильные экономические факторы, но слабый настрой толпы. Тем не



менее, открываем позицию по 1454,6.

Рис. 15. Индекс S&P500, 2000г.

16.07-08.2000г. $N=480$, $h=0,001$, $H=0,7$.

Хаотичный рынок. Закрываем позицию. Продажа по 1520,77.

17.09-10.2000г. $N=240$, $h=-0,004$, $H=0,65$.

Фаза близка к когерентному медвежьему рынку. Без позиций.

18.11-12.2000г. $N=60$, $h=0,004$, $H=0,54$.

Фаза «Случайного блуждания». Без позиций.

19.01-02.2001, $N=160$, $h=-0,001$, $H=0,67$.

Хаотичный рынок. Без позиций.

20.03-04.2001, $N=20$, $h=0$, $H=0,65$.

Хаотичный рынок. Без позиций.

21.05-06.2001, $N=370$, $h=-0,001$, $H=0,66$.

Хаотичный рынок. Без позиций

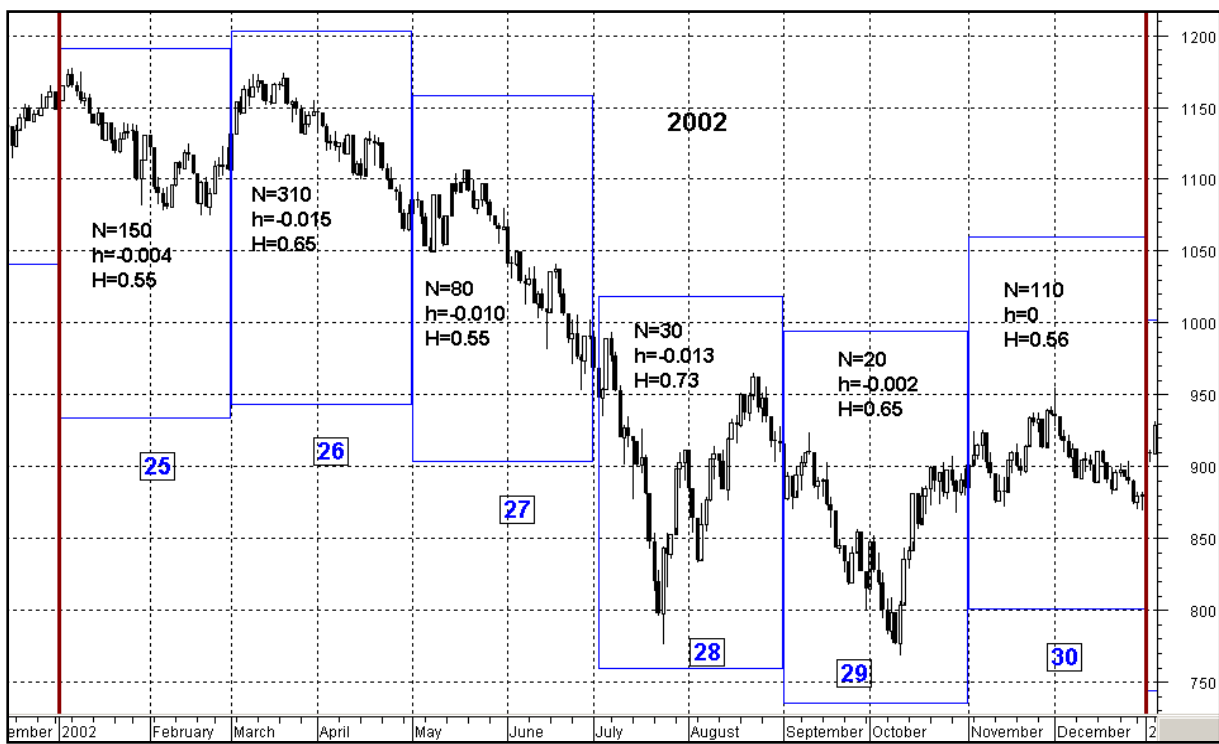
22.07-08.2001, $N=140$, $h=-0,004$, $H=0,57$.

Переходной рынок. Без позиций.

23.09-10.2001, $N=50$, $h=0,005$, $H=0,8$.

Хорошие фундаментальные данные, наложенные на групповое поведение толпы, вызвали разворот медвежьего рынка. Покупка по 1084,10.

Рис. 3.16. Индекс S&P500, 2001г.



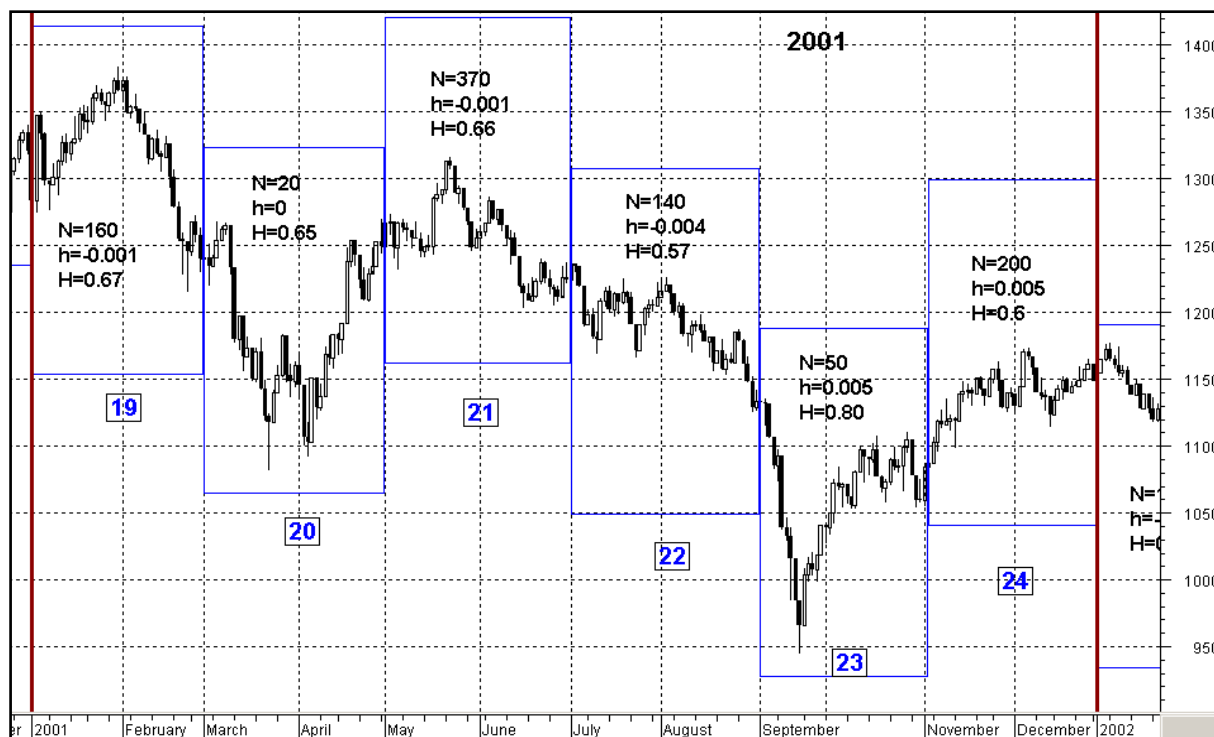


Рис. 17. Индекс S&P500, 2002г.

24.11-12.2001, $N=200$, $h=0,005$, $H=0,6$.

Удерживаем позицию.

25. 01-02.2002, $N=150$, $h=-0,004$, $H=0,55$.

Переходной рынок, высокое h и H колеблющееся около 0.55.

Продажа 1106,73.

26.03-04.2002, $N=310$, $h=-0,015$, $H=0,65$.

Когерентный медвежий рынок. Без позиций.

27.05-06.2002, $N=80$, $h=-0,010$, $H=0,55$.

Когерентный медвежий рынок. Без позиций.

28.07-08.2002, $N=30$, $h=-0,013$, $H=0,73$.

Когерентный медвежий рынок. Без позиций.

29.09-10.2002, $N=20$, $h=-0,002$, $H=0,65$.

Когерентный медвежий рынок. Без позиций.

30.11-12.2002, $N=110$, $h=0$, $H=0,56$.

Переходной рынок. Без позиций.

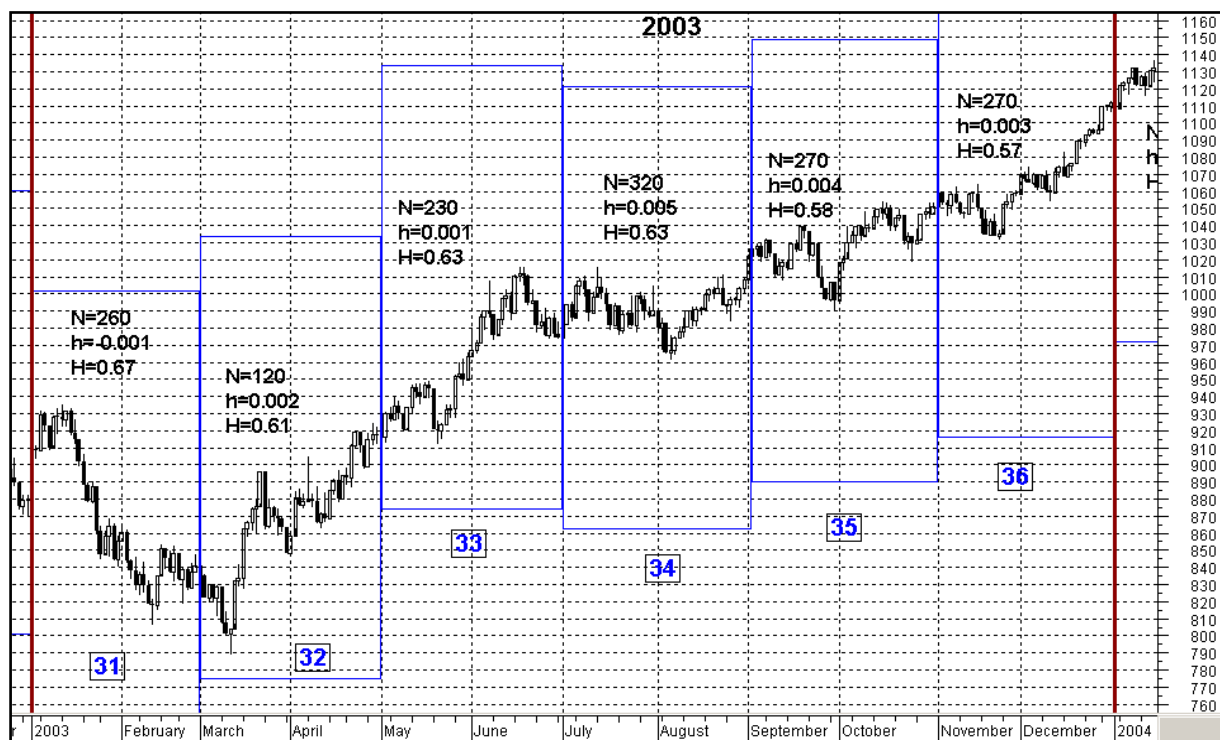


Рис. 3.18. Индекс S&P500, 2003г.

31.01-02.2003, $N=260$, $h=-0,001$, $H=0,67$.

Хаотичный рынок. Без позиций

32.03-04.2003, $N=120$, $h=0,002$, $H=0,61$.

Покупка по 916,92.

33.05-06.2003, $N=230$, $h=0,001$, $H=0,63$.

Хаотичный рынок. Продажа по 976,23.

34.07-08.2003, $N=320$, $h=0,005$, $H=0,63$.

Покупка по 1008,01.

35.09-10.2003, $N=270$, $h=0,004$, $H=0,58$.

Удерживаем позицию.

36.11-12.2003, $N=270$, $h=0,003$, $H=0,57$.

Продажа по 1111,92.



Рис. 3.19. Индекс S&P500, 2004г. (январь-июнь)

37.01-02.2004, $N=480$, $h=0,001$, $H=0,53$.

Фаза случайного блуждания. Без позиций

38. 03-04.2004, $N=480$, $h=0,004$, $H=0,63$.

Покупка по 1107,3

39.05-06.2004, $N=350$, $h=0$, $H=0,6$.

Рынок подобен хаотичному. Продажа по 1140,84.

Итак, в результате торговли за период с февраля 1998 по июнь 2004 года индекс SP500 вырос с 1049,34 до 1140,84 (на 91,55 единиц значений индекса, что может являться прибылью, полученной по стратегии «покупай и держи» за этот период). За этот же период торговля по системе с учетом фазы рынка за счет попытки избегания случайных и хаотичных рынков, то есть с меньшим риском, дала накопленную прибыль 533,69 единиц индекса (таблица 3).

Всего было совершено 8 сделок, все из них оказались прибыльными, скорей всего, это просто следствие малого количества сделок.

Результат торговли по стратегии избегания хаотичных и случайных фаз рынка

№ сделки	Периоды торговли	Цена покупки	Цена продажи	Прибыль/убыток	Накопленная прибыль
1	2-3	1049,34	1133,84	+84,5	84,50
2	5-7	1098,67	1238,33	+139,66	224,16
3	11-13	1342,44	1366,42	+23,98	248,14
4	15-16	1454,60	1520,77	+66,17	314,31
5	23-25	1084,10	1106,72	+22,62	336,93
6	32-33	916,92	976,23	+59,31	396,24
7	34-36	1008,01	1111,92	+103,91	500,15
8	38-39	1107,30	1140,84	+33,54	533,69

Для оценки риска мы использовали коэффициент колеблемости остатков ряда после выделения линейной регрессии, построенной по каждому из 39 промежутков. Для этого вычислялась остаточная сумма квадратов по следующей формуле:

$$S_{\text{итд}}^2 = \sum_{i=1}^n (y'(x_i) - y_i)^2, \quad (20)$$

где n – число дней в каждом периоде; y_i – цена закрытия индекса i -го дня; $y'(x_i)$ – значение цены закрытия i -го дня, построенное по уравнению регрессии.

Т а б л и ц а 3.4

Оценка риска

№ периода	Остаточная сумма квадратов	№ периода	Остаточная сумма квадратов
1	6656,01	21	19493,45
2	9871,43	22	11366,92
3	8416,04	23	51063,51
4	27032,55	24	8139,86
5	38514,44	25	7903,61
6	12968,06	26	7355,14
7	11767,12	27	16355,08
8	17808,25	28	81850,07

9	21560,32	29	55631,79
10	32761,77	30	10934,11
11	29656,20	31	11620,52
12	9866,78	32	9813,86
13	22804,25	33	9788,04
14	101113,11	34	4435,96
15	29771,89	35	5918,62
16	21045,42	36	4931,53
17	23590,92	37	2541,73
18	27271,30	38	13036,91
19	44677,14	39	5592,97
20	93988,45		

Из таблицы 3.4 видно, что среднее значение остаточной суммы квадратов в период торговли 10693, а среднее значение этого показателя в остальные периоды равно 30124,82. Это показывает, что риски торговли по данной системе существенно ниже рисков пассивного управления стратегией длительного владения активом. Таким образом, даже такая простая система уже позволяет уверенно работать на рынке.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Black F. The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81 – Pp. 637-654.
2. Vaga T. The Coherent Market Hypothesis / T. Vaga // Financial Analysts Journal. – December/January, 1991. Арнольд В.И. Теория катастроф / В.И. Арнольд. – 3-е изд., доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1990. – 128 с.
3. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы / М. Шредер. – М: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 528 с.
4. Callan E. A Theory of Social Imitation / E. Callan, D. Shapiro // Physics Today. 27, 1974.
5. Weidlich W. The Statistical Description of Polarization Phenomena in Society, British Journal of Math. Statist. Psychology 24, 1971. Pp. 251-266

6. Маккей Ч. Наиболее распространенные заблуждения и безумства толпы / Ч. Маккей. – М.: Альпина Паблишер, 2003, - 844 с.
7. Ахромеева Т.С. Нестационарные структуры и диффузионный хаос / Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит., 1992. – 544 с.
8. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории хаоса в инвестициях и экономике / Э. Петерс. – М.: Интернет-трейдинг, 2004. – 304 с.
9. Дубовиков М.М. Индекс вариации и его приложение к анализу фрактальных структур // М.М. Дубовиков, Н.В. Старченко. Научный альманах "Гордон", изд-во "Поматур", М. 2005
10. Загайтов И.Б. Исследование закономерностей динамики урожаев, осадков и температур в Северном полушарии / И.Б. Загайтов, С.И. Яблоновская, Л.П. Яновский, Д.А. Филатов и др. – Воронеж: ВГАУ, 2005: -100с.
11. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / В.Б. Занг. – М.: Мир, 1999. – 335 с.
12. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р.М. Кроновер. – М.: Постмаркет, 2000. – 354 с.
13. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций) / С.П. Кузнецов - М.: Физматлит, 2001.
14. Лиховидов В.Н. Складной метр – новый инструмент технического анализа // Валютный спекулянт, №2, февраль 2001, с.40-47.
15. Малинецкий Г.Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 336 с.
16. Сорнетте Д. Как предсказывать крахи финансовых рынков: критические события в комплексных финансовых системах / Д. Сорнетте. – М.: Интернет-трейдинг, 2003. – 400 с.
17. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы / М. Шредер. – М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 528 с.

18. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение / Г. Шустер. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
19. Яновский Л.П. Принципы, методология и научное обоснование прогнозов урожая по технологии «ЗОНТ»: монография / Л.П. Яновский. – Воронеж: Воронеж. гос. аграр. ун-т, 2000. – 376 с.
20. Яновский Л.П. Анализ состояния финансовых рынков на основе методов нелинейной динамики / Л.П. Яновский, Д.А. Филатов // Научно-практический и аналитический журнал: «Финансы и кредит» № 32 (200) – 2005 ноябрь,
21. Hurst H. E. Long-term Storage of Reservoirs / H.E. Hurst // Transactions of the American Society of Civil Engineers. 116, 1951.
22. LeBaron B. A Fast Algorithm for the BDS Statistic // Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics. Январь 1997. Vol. 2. No. 2. P. 53-59.
23. Mandelbrot B. The Variation of Certain Speculative Prices / B. Mandelbrot. – Cambridge: MIT Press, 1964.
24. Markowitz H.M. Portfolio Selection / H.M. Markowitz // Journal of Finance. – 1952.– Vol. 7, №1. – Pp. 77-91.
25. Ross S. A. The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing / S.A. Ross // Journal of Economy Theory. – 1976. – Vol. 13, №3. – Pp. 343-362.
26. Sharpe W.F. Capital Asset Price: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk / W.F. Sharpe // Journal of Finance – 1964. – Vol. 19, №3. – Pp. 425-442.
27. Sornette D., Johansen A., an Bouchaud, J. –P (1996). Stock market crashes, precursors and replicas, Journal de Pfysique I, France 6, 167-175.
28. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. In: Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics, edited by D.A.Rand L.S.Young. Heidelberg: Springer-Verlag, 366-381 (1981).
29. Tobin J. The Theory of Portfolio Selection / J. Tobin // Theory of Interest Rates / Ed. by F.H. Hahn, F.P.R. Brechling. – London: MacMillan, 1965. – Pp. 3-51.