СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Кооперация представляет собой одну из основных форм человеческого поведения. Поэтому по многим практическим причинам важно, чтобы такая кооперация была устойчивой на всем временном промежутке ее реализации. Имеют место три важных условия такой устойчивости при рассмотрении проблемы устойчивости длительных кооперативных соглашений.

1. *Состоятельность во времени (динамическая устойчивость) кооперативных соглашений*. Временная состоятельность представляет собой свойство кооперативного соглашения, когда следуя кооперативной траектории участники соглашения придерживаются одного и того же принципа оптимальности в каждый текущий момент времени, что и в основной игре, а поэтому не имеют объективных мотивов отклоняться от ранее выбранного кооперативного поведения.

2. *Стратегическая устойчивость.* Предположим, что кооперативное соглашение реализуется вдоль кооперативной траектории, при этом никакое индивидуальное отклонение от кооперации каждого участника не приносит выгоды отклонившемуся участнику. Это означает, что исход такого кооперативного соглашения должен достигаться при некотором равновесии по Нэшу, которое и будет гарантировать стратегическую поддержку такой кооперации.

3. *Защита от иррационального поведения.* Это свойство кооперации должно рассматриваться, поскольку нет уверенности в том, что все участники кооперации будут вести рационально на всем продолжительном промежутке реализации кооперативного соглашения. Участники кооперации должны быть уверены в том, что даже в случае реализации наихудшего сценария (например, аннулирования кооперативного соглашения) их выигрыш будет не меньше, чем при некооперативном поведении.

В работе развит математический инструментарий, основанный на применении процедуры распределения выигрыша (ПРВ) или процедуры распределения дележа (ПРД) применительно к анонсированным выше аспектам кооперации. Кроме того, общие идеи устойчивости реализованы для частных случаев моделей совместного предприятия как для детерминированной, так и стохастической динамики.

Предварительные результаты проделанной работы докладывались на следующих международных научных конференциях:

1. 2008 - 14-ый международный латиноамериканский конгресс по исследованию операций, 9-12 сентября, Картахена, Колумбия. Доклад: Модели устойчивой кооперации (совместно с Петросяном Л.А.)

2. 2008 - 13-ый международный симпозиум по динамическим играм и приложениям, 30 июня – 03 июля, Вроцлав, Польша. Доклад: Количественное моделирование совместного предприятия в условиях неопределенности (совместно с Колабутиным Н.В.)

3. 2008 - Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина, 17-22 июня, МГУ, Москва. Доклад: Количественное моделирование динамически устойчивого совместного предприятия в условиях полной и неполной информации

4. 2007 – 8-ой международный симпозиум ИФАК по вычислительной экономике, 9-11 октября, Стамбул, Турция. Доклад: «Количественное моделирование динамически устойчивой кооперации при создании совместного предприятия» (совместно с Колабутиным Н.В.)

0.1. Случай непрерывного времени

Рассмотрим дифференциальную игру n - лиц $\Gamma(x_0, T - t_0)$ с предписанной продолжительностью и независимыми движениями на временном промежутке $[t_0, T]$. Уравнения движения имеют вид:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, u_i),\ u_i \in U_i \subset R^l,\ x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{im}) \in R^m,\ f_i = (f_{i1}, \ldots, f_{im}) \in R^m$$
$$x_i(t_0) = x_i^0,\ i = 1, \ldots, n. \qquad (0.1.1)$$

Предполагается, что система дифференциальных уравнений (0.1.1) удовлетворяет всем необходимым условиям существования, единственности и продолжимости решения для любого n - набора измеримых управлений $u_1(t), \ldots, u_n(t)$.

Выигрыш игрока i определяется следующим образом:

$$H_i(x_0, T - t_0; u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)) = \int_{t_0}^{T} h_i(x_0; x(\tau)) d\tau,$$

где $h_i(x_0; x)$ представляет собой непрерывную функцию и $x(\tau) = \{x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau)\}$ решение системы (0.1.1) при допустимом программном управлении $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ и начальных условиях $x(t_0) = \{x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\} = \{x_1^0, \ldots, x_n^0\} = x_0$.

Предположим, что существует n - набор программных управлений $\overline{u}(t) = (\overline{u}_1(t), \ldots, \overline{u}_n(t))$ и траектория $\overline{x}(t)$, $t \in [t_0, T]$ такие, что

$$\max_{u_1(t),\dots,u_n(t)} \sum_{i=1}^{n} H_i(x_0, T-t_0; u_1(t),\dots,u_n(t)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} H_i(x_0, T-t_0; \overline{u}_1(t),\dots,\overline{u}_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{T} h_i(x_0; \overline{x}(\tau)) d\tau . \qquad (0.1.2)$$

Траекторию $\overline{x}(t) = (\overline{x}_1(t),\dots,\overline{x}_n(t))$, удовлетворяющую (0.1.2), будем называть «оптимальной кооперативной траекторией».

Обозначим через $N = \{1,\dots,n\}$ - множество игроков и определим в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ - классическим образом характеристическую функцию:

$$V(x_0, T-t_0; N) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{T} h_i(x_0; \overline{x}(\tau)) d\tau$$

$$V(x_0, T-t_0; \varnothing) = 0$$

$$V(x_0, T-t_0; S) = Val\ \Gamma_{S, N\setminus S}(x_0, T-t_0) \qquad (0.1.3)$$

где $Val\ \Gamma_{S,N\setminus S}(x_0, T-t_0)$ обозначает значение антагонистической игры между коалицией S, действующей как игрок 1, и коалицией $N \setminus S$, действующей как игрок 2, при этом выигрыш игрока S равен:

$$\sum_{i\in S} H_i(x_0, T-t_0; u_1(\cdot),\dots,u_n(\cdot)) .$$

Определим также $L(x_0, T-t_0)$ как дележ в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ [Neumann, Morgenstern, 1947]:

$$L(x_0, T-t_0) = \left\{ \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) : \alpha_i \ge V(x_0, T-t_0; \{i\}), \sum_{i\in N} \alpha_i = V(x_0, T-t_0; N) \right\} \ (0.1.4)$$

0.2. Регуляризованная игра $\Gamma_\alpha(x_0, T-t_0)$

Для каждого дележа $\alpha \in L(x_0, T-t_0)$ определим некооперативную игру $\Gamma_\alpha(x_0, T-t_0)$, которая отличается от игры $\Gamma(x_0, T-t_0)$ только выигрышами вдоль оптимальной кооперативной траектории $\overline{x}(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$.

Пусть $\alpha \in L(x_0, T-t_0)$. Определим процедуру распределения дележа (ПРД) [Petrosjan, 1993] как функцию $\beta(\tau) = (\beta_1(\tau),\dots,\beta_n(\tau))$, $\tau \in [t_0, T]$, такую что

$$\alpha_i = \int_{t_0}^{T} \beta_i(\tau) d\tau . \qquad (0.2.1)$$

Определим через $H_i^\alpha(x_0, T-t_0; u_1(\cdot),\dots,u_n(\cdot))$ функцию выигрыша в игре $\Gamma_\alpha(x_0, T-t_0)$ и через $x(\tau)$ соответствующую траекторию. Тогда

$$H_i^\alpha(x_0, T-t_0; u_1(\cdot),\dots,u_n(\cdot)) = H_i(x_0, T-t_0; u_1(\cdot),\dots,u_n(\cdot)),$$

если не существует такого $t \in (t_0, T]$, что $x(\tau) = \overline{x}(\tau)$ для $\tau \in (t_0, t]$. Пусть $t = \sup\{t' : x(\tau) = \overline{x}(\tau), \tau \in [t_0, t']\}$ и $t > t_0$. Тогда

$$H_i^\alpha(x_0, T-t_0; u_1(\cdot),\dots,u_n(\cdot)) = \int_{t_0}^{t} \beta_i(\tau)d\tau + H_i(\overline{x}(t), T-t; u_1(\cdot),\dots,u_n(\cdot)) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \beta_i(\tau)d\tau + \int_{t}^{T} h_i(\overline{x}(t); x(\tau))d\tau .$$

В частном случае, когда $x(\tau) = \overline{x}(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$ (если $x(\tau)$ представляет собой оптимальную кооперативную траекторию в смысле уравнения (0.1.2)) имеем

$$H_i^\alpha(x_0, T-t_0; \overline{u}_1(\cdot),\dots,\overline{u}_n(\cdot)) = \int_{t_0}^{T} \beta_i(\tau)d\tau = \alpha_i .$$

По определению функции выигрыша в игре $\Gamma_\alpha(x_0, T-t_0)$ получим, что вдоль оптимальной кооперативной траектории эти выигрыши равны компонентам дележа $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

Рассмотрим текущие подыгры [Neumann, Morgenstern, 1947] – $\Gamma(\overline{x}(t), T-t)$ вдоль $\overline{x}(t)$ и текущие множества дележей $L(\overline{x}(t), T-t)$. Пусть $\alpha(t) \in L(\overline{x}(t), T-t)$. Предположим, что $\alpha(t)$ может быть выбран как дифференцируемая по t, $t \in [t_0, T]$ функция.

Определение 0.2.1. *Игра* $\Gamma_\alpha(x_0, T-t_0)$ *называется регуляризацией игры* $\Gamma(x_0, T-t_0)$ *(*α*- регуляризация), если ПРД* β *определяется таким образом, что*

$$\alpha_i(t) = \int_{t}^{T} \beta_i(\tau)d\tau$$

или

$$\beta_i(t) = -\alpha_i'(t) . \qquad (0.2.2)$$

Из (0.2.2) получаем

$$\alpha_i = \int_{t_0}^{t} \beta_i(\tau)d\tau + \alpha_i(t), \qquad (0.2.3)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in L(x_0, T - t_0)$, и $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)) \in L(\overline{x}(t), T - t)$. Предположим теперь, что $M(x_0, T - t_0) \subset L(x_0, T - t_0)$ представляет собой некоторый принцип оптимальности для кооперативной версии игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$, а $M(\overline{x}(t), T - t) \subset L(\overline{x}(t), T - t)$ - тот же принцип оптимальности, но определенный для подыгр $\Gamma(\overline{x}(t), T - t)$ с начальными условиями на оптимальной траектории. В качестве M может быть выбрано c-ядро, HM- решение, вектор Шепли, Ядро и другие принципы оптимальности, используемые в кооперативной теории игр. Если $\alpha \in M(x_0, T - t_0)$ и $\alpha(t) \in M(\overline{x}(t), T - t)$, то условие (0.2.3) дает нам временную состоятельность выбранного дележа α, или выбранного принципа оптимальности. В таком случае будем говорить, что имеет место *временная состоятельность (динамическая устойчивость) выбранного кооперативного соглашения*.

Рассмотрим теперь проблему *стратегической устойчивости* кооперативных соглашений. Основываясь на процедуре распределения дележа β, удовлетворяющей (0.2.2), можно доказать следующую основную теорему. Полное доказательство этого результата можно найти в [Petrosyan, Zenkevich, 2009].

Теорема 0.2.1. *В регуляризованной игре* $\Gamma_\alpha(x_0, T - t_0)$ *для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует* ε- *равновесие по Нэшу [Nash, 1951] с выигрышами* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$.

Условия защиты от иррационального поведения. Предположим теперь, что в некоторый момент времени иррациональное поведение игрока (или группы игроков) приводит к распаду большой коалиции, а тем самым и прекращению действия кооперативного соглашения. В этом случае *условие защиты от иррационального поведения* [Yeung, 2007] требует, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$V(x_0, T - t_0; \{i\}) \le \int_{t_0}^{t} \beta_i(\tau)d\tau + V(\overline{x}(t), T - t; \{i\}),\ i \in N. \qquad (0.2.4)$$

Если ПРД $\beta(t)$ может быть выбрана так, что удовлетворяются и условие временной состоятельности и условие защиты от иррационального поведения (условие стратегической устойчивости следует из временной состоятельности в соответствии с теоремой 0.2.1), тогда кооперативное соглашение о выборе дележа $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ будем называть *устойчивым кооперативным соглашением*.

Из (0.2.4) мы имеем, что соответствующее кооперативное соглашение для ПРД $\beta(\tau)=(\beta_1(\tau),\beta_2(\tau),\ldots,\beta_n(\tau))$ должно удовлетворять условию:

$$\beta_i(\tau)\geq -\frac{d}{d\tau}V(\overline{x}(\tau),T-\tau;\{i\}),\ i=1,\ldots,n. \qquad (0.2.5)$$

Другими словами, для устойчивого соглашения все три условия устойчивости должны выполняться. На практике – это не всегда именно так. Однако последующее исследование показывает, что в некоторых случаях построение устойчивых соглашений возможно. Данное положение мы проиллюстрируем для случая моделирования устойчивого соглашения о создании совместного предприятия.

1. ДИНАМИЧЕСКАЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ УСТОЙЧИВОГО СОВМЕСТНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Для начала мы рассмотрим детерминированный случай совместного предприятия.

1.1. Модель совместного технологического развития

Мы рассматриваем случай, когда три фирмы объединяются в совместное предприятие с целью максимизации совместной прибыли. Объединение происходит на заранее согласованном временном периоде $[t_0, T]$, в конце которого технологии фирмы ликвидируются, и предприятие расформировывается. Прибыль фирмы i на этом интервале определяется формулой

$$\int_{t_0}^{T}\left[P_i[x_i(s)]^{1/2} - c_i u_i(s)\right]\exp[-r(s-t_0)]ds + \exp[-r(T-t_0)]q_i[x_i(T)]^{1/2}$$

$$i \in N = \{1,2,3\} \qquad (1.1.1)$$

где P_i , c_i, и q_i – положительные константы, r – константа, определяющая размер дисконта;

$x_i(s) \in R^+$ − уровень технологий компании i в момент s, который мы будем называть состоянием игрока i;

$u_i(s) \in R^+$ − инвестиции в технологическое развитие, эту величину мы будем называть управлением игрока i;

$P_i[x_i(s)]^{1/2}$ − чистая операционная прибыль компании i при технологическом уровне $x_i(s)$;

$c_i u_i(s)$ − стоимость инвестиций;

$q_i[x_i(T)]^{1/2}$ − ликвидационная стоимость технологии компании i в момент T.

Состояние динамики фирмы i характеризуется развитием ее технологии, которое протекает согласно дифференциальному уравнению

$$\dot{x}_i(s) = \alpha_i[u_i(s)x_i(s)]^{1/2} - \delta x_i(s)$$
$$x_i(t_0) = x_i^0,\ i \in N = \{1,2,3\} \qquad (1.1.2),$$

где $\alpha_i[u_i(s)x_i(s)]^{1/2}$ − прибавка в технологии, полученная при размере инвестирования $u_i(s)$, δ – параметр устаревания технологии.

Предположим, что несколько фирм объединяются для максимизации совместной прибыли. За счет своих партнеров фирма-участник может получить дополнительные возможности в развитии, которые она не могла бы получить в одиночку. Поэтому динамика развития технологии фирм изменяется. В случае, когда все три фирмы объединяются в совместное предприятие, развитие фирмы *i* принимает вид

$$\dot{x}_i(s) = \alpha_i\left[u_i(s)x_i(s)\right]^{1/2} + b_j^{[j,i]}\left[x_j(s)x_i(s)\right]^{1/2} + b_k^{[k,i]}\left[x_k(s)x_i(s)\right]^{1/2} - \delta x_i(s),$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i, j, k \in N = \{1,2,3\},\, i \neq j \neq k \qquad (1.1.3),$$

где $b_j^{[j,i]}$ и $b_k^{[k,i]}$ − положительные константы. В частности, $b_j^{[j,i]}$ представляет эффект передачи технологии для фирмы *i*, осуществляемый фирмой *j*. Прибыль совместного предприятия определяется суммой прибылей входящих в него

$$\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{3}\left[P_i[x_i(s)]^{1/2} - c_i u_i(s)\right]\exp[-r(s-t_0)]ds + \sum_{i=1}^{3}\exp[-r(T-t_0)]q_i\left[x_i(T)\right]^{1/2}$$

$$i \in N = \{1,2,3\} \qquad (1.1.4)$$

1.2 Выигрыш коалиции

Выигрышем коалиции $K \subset N = \{1,2,3\}$ в нашем случае является ее прибыль, которая определяется суммой прибылей ее участников. В момент t_0 она принимает вид:

$$\int_{t_0}^{T}\sum_{i\in K}\left[P_i[x_i(s)]^{1/2} - c_i u_i(s)\right]\exp[-r(s-t_0)]ds$$

$$+ \sum_{i\in K}\exp[-r(T-t_0)]q_i[x_i(T)]^{1/2} \qquad (1.2.1)$$

При этом развитие уровня технологии у фирм-участников протекает по закону

$$\dot{x}_i(s) = \alpha_i\left[u_i(s)x_i(s)\right]^{1/2} + \sum_{j\in K,\, j\neq i} b_j^{[j,i]}\left[x_j(s)x_i(s)\right]^{1/2} - \delta x_i(s),$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i \in N, K \subset N \qquad (1.2.2)$$

Для простоты обозначений, мы представим (1.2.2) в виде:

$$\dot{x}_K(s) = \{\dot{x}_i(s)\}_{i\in K} = f^K\left[s, x_K(s), u_K(s)\right], \quad x_K(t_0) = x_K^0 \qquad (1.2.3),$$

где u_K есть множество элементов $\{u_i\}_{i\in K}$, $f^K\left[t, x_K, u_K\right]$ − это вектор-столбец, содержащий $f_i^K\left[t, x_K, u_i\right]$ для $i \in K$.

Для обеспечения максимального выигрыша коалиции K, мы должны рассмотреть задачу оптимального управления $\varpi\left[K; t_0, x_K^0\right]$, которое максимизирует (1.2.1) при условии (1.2.2).

Решение данной задачи было описано Л.А. Петросяном и Д. Янгом [Yeung, Petrosjan, 2006]) с использованием методики динамического программирования. Для этого им была введена в рассмотрение функция Беллмана, и доказана следующая теорема

Теорема 1.2.1. ([Yeung, Petrosjan, 2006])

Множество оптимальных управлений $\{u_K^*(t)\}$ дает множество оптимальных решений задачи $\varpi[K;t_0,x_K^0]$, если существует непрерывно дифференцируемая функция $W^{(t_0)K}(t,x_K):[t_0,T]\times \Pi_{j\in K}R^{m_j}\to R$, являющаяся решением уравнения Беллмана:

$$-W_t^{(t_0)K}(t,x_K)=\max_{u_K}\left\{\sum_{j\in K}g^i[t,x_i,u_i]\exp\left[-\int_{t_0}^t r(y)dy\right]\right.$$

$$\left.+\sum_{i\in K}W_{x_i}^{(t_0)K}(t,x_K)f_i^K[t,x_K,u_i]\right\},$$

$$W^{(t_0)K}(T,x_K)=\sum_{i\in K}\exp\left[-\int_{t_0}^T r(y)dy\right]q^i(x_i),$$

где $g^i[t,x_i,u_i]\exp\left[-\int_{t_0}^t r(y)dy\right]$ – мгновенная прибыль игрока *i* в момент *t*, дисконтированная на данный момент.

Замечание 1.2.1.

Функция $W^{(t_0)K}(t,x_K)$ определяет максимальный выигрыш коалиции K на временном промежутке $[t,T]$, $t_0\le t\le T$

Рассмотрим задачу $\varpi[K;\tau,x_K^\tau]$, которая начинается в момент $\tau\in[t_0,T]$ в начальном состоянии x_K^τ. Используя теорему, можно показать, что:

$$\exp\left[\int_\tau^t r(y)dy\right]W^{(\tau)K}(t,x_K^t)=W^{(t)K}(t,x_K^t),\quad t_0\le\tau\le t\le T$$

$$u_K^{(\tau)K*}(t,x_K^t)=u_K^{(t)K*}(t,x_K^t),\quad t_0\le\tau\le t\le T$$

В нашем случае уравнение Беллмана принимает следующий вид:

$$-W_t^{(t_0)K}(t,x_K^t)=$$

$$\max_{u_k}\left\{\sum_{i\in K}[P_i x_i^{1/2}(t)-c_i u_i(t)]\exp[-r(t-t_0)]+\sum_{i\in K}W_{x_i}^{(t_0)K}(t,x_K^t)f_i^K[t,x_K^t,u_K^t]\right\}$$

$$W^{(t_0)K}(T,x_K^T)=\sum_{i\in K}\exp[-r(T-t_0)]q_i(x_i(T));$$

$$f^K[t,x_K^t,u_K^t]=\dot{x}_K;\quad K\subset N \qquad (1.2.4)$$

Поскольку, во-первых, уровень технологии фирмы *i* увеличивает доход, так как $g^i[s,x_i(s),u_i(s)]$ и $q^i(x_i(T))$ положительно определены от

$x_i(s)$, и во-вторых, фирма-участник может получить новые навыки и технологии от другой фирмы в коалиции, то в большинстве случаев имеет место *супераддитивность*, то есть

$$W^{(\tau)K}(\tau, x_K^\tau) \geq W^{(\tau)L}(\tau, x_L^\tau) + W^{(\tau)K\setminus L}(\tau, x_{K\setminus L}^\tau), \quad L \subset K \subseteq N,$$

где $K \setminus L$ есть относительное дополнение L в K.

1.3 Теоретическое обоснование решения

Следует рассмотреть три варианта формирования коалиции.

Если каждая из фирм действует независимо, уравнение (1.2.4) принимает вид:

$$-W_t^{(t_0)i}(t, x_i^t) =$$

$$\max_{u_i}\left\{[P_i x_i^{1/2}(t) - c_i u_i(t)]\exp[-r(t-t_0)] + W_{x_i}^{(t_0)i}(t, x_i^t) f_i[t, x_i^t, u_i^t]\right\}$$

$$W^{(t_0)i}(T, x_i^T) = \exp[-r(T-t_0)]q_i(x_i(T))$$

$$f_i[t, x_K^t, u_K^t] = \dot{x}_i; \quad i \in N \qquad (1.3.1)$$

Проведя максимизацию, имеем:

$$u_i = \frac{\alpha_i^2}{4(c_i)^2}\left[W_{x_i}^{(t_0)i}(t, x_i)\exp[r(t-t_0)]\right]^2 x_i, \text{ для } i \in N = \{1,2,3\} \qquad (1.3.2)$$

Заменяя u_i в уравнении (1.2.5), имеем:

$$-W_t^{(t_0)i}(t, x_i) =$$

$$P_i x_i^{1/2}\exp[-r(t-t_0)] - \frac{\alpha_i^2}{4c_i}\left[W_{x_i}^{(t_0)i}(t, x_i)\right]^2 \exp[r(t-t_0)]x_i$$

$$+\frac{\alpha_i^2}{2c_i}\left[W_{x_i}^{(t_0)i}(t, x_i)\right]^2 \exp[r(t-\tau)]x_i - \delta W_{x_i}^{(t_0)i}(t, x_i)x_i, \text{для } i \in N = \{1,2,3\} \qquad (1.3.3)$$

В итоге, решая данное уравнение, получаем:

$$W^{(t_0)i}(t, x_i) = \left[A_i^{\{i\}}(t)x_i^{1/2} + C_i^{\{i\}}(t)\right]\exp[-r(t-t_0)], \text{ для } i \in N = \{1,2,3\} \qquad (1.3.4)$$

где

$$\dot{A}_i^{\{i\}}(t) = \left(r + \frac{\delta}{2}\right)A_i^{\{i\}}(t) - P_i,$$

$$\dot{C}_i^{\{i\}}(t) = rC_i^{\{i\}}(t) - \frac{\alpha_i^2}{16c_i}\left[A_i^{\{i\}}(t)\right]^2,$$

$$A_i^{\{i\}}(T) = q_i, C_i^{\{i\}}(T) = 0 \qquad (1.3.5)$$

Первое уравнение блочно-рекурсивной системе (1.3.5) линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $A_i^{\{i\}}(t)$, которое может быть решено независимо с помощью стандартной техники. Подстановка решения $A_i^{\{i\}}(t)$ во второе уравнение (1.3.5) дает линейное дифференциальное уравнение относительно $C_i^{\{i\}}(t)$. Решение $C_i^{\{i\}}(t)$ может быть получено, используя стандартную технику. Явное решение здесь не приведено в силу громоздкости записи.

Более того, как указано в замечании 1.2.1, для $\tau \in [t_0, T]$:

$$W^{(\tau)i}(t, x_i) = \left[A_i^{\{i\}}(t) x_i^{1/2} + C_i^{\{i\}}(t)\right] \exp[-r(t-\tau)]$$

для $i \in N = \{1,2,3\}$ (1.3.6)

Исходя из формул (1.3.4) и (1.3.6), мы можем получить:

$$W_t^{(\tau)i}(t, x_i^{\tau*})\Big|_{t=\tau} =$$

$$\left[\dot{A}_i^{\{i\}}(\tau)(x_i^{\tau*})^{1/2} + \dot{C}^{\{i\}}(\tau)\right] - r\left[A_i^{\{i\}}(\tau)(x_i^{\tau*})^{1/2} + C^{\{i\}}(\tau)\right]$$

для $i \in N = \{1,2,3\}$;

$$W_{x_i^{\tau*}}^{(\tau)K}(t, x_K^{\tau*})\Big|_{t=\tau} = \frac{1}{2} A_i^K(\tau)(x_i^{\tau*})^{-1/2}, \; i \in K \subseteq \{1,2,3\} \qquad (1.3.7).$$

Инвестиционные стратегии для игроков принимают вид:

$$u_i^{\{i\}}(t) = \frac{\alpha_i^2}{16(c_i)^2}\left[A_i^{\{i\}}(t)\right]^2, \quad i \in \{1,2,3\} \qquad (1.3.8)$$

Динамика состояния каждой фирмы на временном интервале $[t_0, T]$ имеет вид:

$$\dot{x}_i(s) = \frac{\alpha_i^2}{4c_i} A_i^{\{i\}}(s) x_i(s)^{1/2} - \delta x_i(s),$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i \in N = \{1,2,3\} \qquad (1.3.9),$$

Решая эти уравнения, мы получаем траектории, оптимальные для индивидуального развития фирм.

В совместном предприятии фирмы действуют совместно, чтобы максимизировать (1.1.4) при условии (1.1.3). В этом случае уравнение Беллмана принимает вид:

$$-W_t^{(t_0)\{1,2,3\}}(t, x_1, x_2, x_3) =$$

$$\max_{u_i}\left\{\sum_{i=1}^{3}\left[P_i x_i^{1/2} - c_i u_i\right]\exp\left[-r(t-t_0)\right]\right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{3} W_{x_i}^{(\tau)i}(t, x_i)\left[\alpha_i (u_i x_i)^{1/2} + b_j^{[j,i]}\left[x_j x_i\right]^{1/2} + b_k^{[k,i]}\left[x_k x_i\right]^{1/2} - \delta x_i\right]\right\},$$

$$W^{(t_0)\{1,2,3\}}(T, x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \exp[-r(T-t_0)] q_i [x_i]^{1/2},$$

для $i, j, k \in N = \{1,2,3\}, \quad i \neq j \neq k$ (1.3.10)

Проведя максимизацию, получаем:

$$u_i = \frac{\alpha_i^2}{4(c_i)^2}\left[W_{x_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)\exp[r(t-t_0)]\right]^2 x_i,\ i\in\{1,2,3\} \qquad (1.3.11)$$

Подставляя (1.3.11) в (1.3.10), получаем:

$$-W_t^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3) =$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left[P_i x_i^{1/2}\exp[-r(t-t_0)]\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha_i^2 x_i}{4c_i}\left[W_{x_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)\right]^2\exp[r(t-t_0)]\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{3}W_{x_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)\left[\frac{\alpha_i^2}{2c_i}\left[W_{x_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)\right]^2\exp[r(t-t_0)]x_i\right.$$

$$\left.+b_j^{[j,i]}\left[x_j x_i\right]^{1/2}+b_k^{[k,i]}\left[x_k x_i\right]^{1/2}-\delta x_i\right]$$

$$W^{(t_0)\{1,2,3\}}(T,x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\exp[-r(T-t_0)]q_i\left[x_i\right]^{1/2}$$

для $i,j,k\in N=\{1,2,3\},\quad i\neq j\neq k$ (1.3.12)

Решая (1.3.12), получаем:

$$W^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)=\left[A_1^{\{1,2,3\}}(t)x_1^{1/2}+A_2^{\{1,2,3\}}(t)x_2^{1/2}\right.$$

$$\left.+A_3^{\{1,2,3\}}(t)x_3^{1/2}+C^{\{1,2,3\}}(t)\right]\exp[-r(t-t_0)] \qquad (1.3.13),$$

где $A_1^{\{1,2,3\}}(t), A_2^{\{1,2,3\}}(t), A_3^{\{1,2,3\}}(t)$ и $C^{\{1,2,3\}}(t)$ удовлетворяют

$$\dot{A}_i^{\{1,2,3\}}(t)=\left(r+\frac{\delta}{2}\right)A_i^{\{1,2,3\}}(t)-\frac{b_i^{[i,j]}}{2}A_j^{\{1,2,3\}}(t)-\frac{b_i^{[i,k]}}{2}A_k^{\{1,2,3\}}(t)-P_i,$$

$i,j,k\in N=\{1,2,3\},\quad i\neq j\neq k$

$$\dot{C}^{\{1,2,3\}}(t)=rC^{\{1,2,3\}}(t)-\sum_{i=1}^{3}\frac{\alpha_i^2}{16c_i}\left[A_i^{\{1,2,3\}}(t)\right]^2,$$

$$A_i^{\{1,2,3\}}(T)=q_i,\ C_i^{\{1,2,3\}}(T)=0 \qquad (1.3.14)$$

Из формулы (1.3.13) получаем:

$$W_t^{(\tau)\{1,2,3\}}(t,x_{\{1,2,3\}}^{\tau*})\Big|_{t=\tau}=\left[\dot{A}_1^{\{1,2,3\}}(\tau)(x_1^{\tau*})^{1/2}+\dot{A}_2^{\{1,2,3\}}(\tau)(x_2^{\tau*})^{1/2}\right.$$

$$\left.+\dot{A}_3^{\{1,2,3\}}(\tau)(x_3^{\tau*})^{1/2}+\dot{C}^{\{1,2,3\}}(\tau)\right]$$

$$-r\left[A_1^{\{1,2,3\}}(\tau)(x_1^{\tau*})^{1/2}+A_2^{\{1,2,3\}}(\tau)(x_2^{\tau*})^{1/2}\right.$$

$$\left.+A_3^{\{1,2,3\}}(\tau)(x_3^{\tau*})^{1/2}+C^{\{1,2,3\}}(\tau)\right];$$

$$W_{x_i^{\tau*}}^{(\tau)\{1,2,3\}}(t,x_{\{1,2,3\}}^{\tau*})\Big|_{t=\tau}=\frac{1}{2}A_i^{\{1,2,3\}}(\tau)(x_i^{\tau*})^{-1/2},\ i\in K\subseteq\{1,2,3\} \qquad (1.3.15).$$

Инвестиционные стратегии в совместном предприятии могут быть получены в виде:

$$u_i^{\{1,2,3\}}(t) = \frac{\alpha_i^2}{16(c_i)^2}\left[A_i^{\{1,2,3\}}(t)\right]^2, \quad i \in N = \{1,2,3\} \tag{1.3.16}$$

Динамика траекторий состояний совместного производства на временном интервале [t_0 , T] имеет вид:

$$\dot{x}_i(s) = \frac{\alpha_i^{\ 2}}{4c_i} A_i^{\{1,2,3\}}(s)x_i(s)^{1/2} + b_j^{[j,i]}\left[x_j(s)x_i(s)\right]^{1/2} + b_k^{[k,i]}\left[x_k(s)x_i(s)\right]^{1/2} - \delta x_i(s)$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i, j, k \in N = \{1,2,3\}, i \neq j \neq k \tag{1.3.17}$$,

Решая полученную систему дифференциальных уравнений, получаем оптимальный вектор кооперативных траекторий игроков.

В случае, когда две из трех фирм формируют коалицию $\{i, j\} \subset \{1,2,3\}$, чтобы максимизировать совместный доход, уравнение Беллмана принимает вид:

$$-W_t^{(t_0)K}(t, x_K^t) =$$

$$\max_{u_k}\left\{\sum_{i\in K}[P_i x_i^{1/2}(t) - c_i u_i(t)]\exp[-r(t-t_0)] + \sum_{i\in K} W_{x_i}^{(t_0)K}(t, x_K^t) f_i^K[t, x_K^t, u_K^t]\right\}$$

$$W^{(t_0)K}(T, x_K^T) = \sum_{i\in K}\exp[-r(T-t_0)]q_i(x_i(T));$$

$$f^K[t, x_K^t, u_K^t] = \dot{x}_K; \quad K \subset N; \quad |K| = 2 \tag{1.3.18}$$

Следуя сделанному выше анализу, мы получаем следующие функции:

$$u_i = \frac{\alpha_i^2}{4(c_i)^2}\left[W_{x_i}^{(t_0)\{i,j\}}(t, x_i, x_j)\exp[r(t-t_0)]\right]^2 x_i, \ i, j \in \{1,2,3\}, \quad i \neq j \tag{1.3.19}$$

$$W^{(t_0)\{i,j\}}(t, x_i, x_j) = \left[A_i^{\{i,j\}}(t)x_i^{1/2} + A_j^{\{i,j\}}(t)x_j^{1/2} + C^{\{i,j\}}(t)\right]\exp[-r(t-t_0)]$$

$$\{i, j\} \subset N = \{1,2,3\}, \quad i \neq j \tag{1.3.20}$$,

где $A_i^{\{i,j\}}(t), A_j^{\{i,j\}}(t)$ и $C^{\{i,j\}}(t)$ удовлетворяют

$$\dot{A}_i^{\{i,j\}}(t) = \left(r + \frac{\delta}{2}\right)A_i^{\{i,j\}}(t) - \frac{b_i^{[i,j]}}{2}A_j^{\{i,j\}}(t) - P_i,$$

$$i, j \in N = \{1,2,3\}, \quad i \neq j$$

$$\dot{C}^{\{i,j\}}(t) = rC^{\{i,j\}}(t) - \sum_{i=1}^{3}\frac{\alpha_i^2}{16c_i}\left[A_i^{\{i,j\}}(t)\right]^2,$$

$$A_i^{\{i,j\}}(T) = q_i, C^{\{i,j\}}(T) = 0 \tag{1.3.21}$$

Оптимальные стратегии фирм принимают вид:

$$u_i^{\{i,j\}}(t) = \frac{\alpha_i^2}{16(c_i)^2}\left[A_i^{\{i,j\}}(t)\right]^2, \quad i \in \{i, j\} \subset N = \{1,2,3\} \tag{1.3.22}$$

После подстановки управлений в уравнения состояний (1.2.2), последние принимают вид:

$$\dot{x}_i(s) = \frac{\alpha_i^{\,2}}{4c_i} A_i^{\{i,j\}}(s) x_i(s)^{1/2} + b_j^{[j,i]}\left[x_j(s) x_i(s)\right]^{1/2} - \delta x_i(s),$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i, j \in N = \{1,2,3\}, i \neq j \tag{1.3.23}$$

1.4. Вектор Шепли в динамическом случае

Мы предполагаем, что фирмы делят совместную прибыль в соответствии с вектором Шепли.

Для того чтобы максимизировать доход совместного предприятия фирмы будут использовать вектор управлений (1.3.16) на интервале $[t_0, T]$, получая из уравнения (1.3.23) соответствующие оптимальные траектории. В момент t_0 и в состоянии $x_N^{t_0}$ фирмы договариваются, что доля дохода фирмы i будет:

$$v^{(t_0)i}(t_0, x_N^0) = \sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\left[W^{(t_0)K}(t_0, x_K^0) - W^{(t_0)K \setminus i}(t_0, x_{K\setminus i}^0)\right],$$

$$i \in N \tag{1.4.1}$$

Однако вектор Шепли должен поддерживаться на всем производства $[t_0, T]$. В частности, в момент времени $\tau \in [t_0, T]$ и состоянии x_N^τ должно выполняться:

$$v^{(\tau)i}(\tau, x_N^\tau) = \sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\left[W^{(\tau)K}(\tau, x_K^\tau) - W^{(\tau)K \setminus i}(\tau, x_{K\setminus i}^\tau)\right] \tag{1.4.2}$$

Отметим, что $v^{(\tau)}(\tau, x_N^{\tau *}) = \left[v^{(\tau)1}(\tau, x_N^{\tau *}), \ldots, v^{(\tau)n}(\tau, x_N^{\tau *})\right]$, как указано в (1.4.2), удовлетворяет основным свойствам дележа:

$$\sum_{i=1}^{n} v^{(\tau)i}(\tau, x_N^{\tau *}) = W^{(\tau)N}(\tau, x_N^{\tau *}),$$

$$v^{(\tau)i}(\tau, x_N^{\tau *}) \geq W^{(\tau)i}(\tau, x_N^{\tau *}) \quad i \in N, \tau \in [t_0, T]. \tag{1.4.3}$$

Первая часть в (1.4.3) говорит о том, что $v^{(\tau)}(\tau, x_N^{\tau *})$ удовлетворяет свойству оптимальности по Парето на всем интервале игры. Вторая часть иллюстрирует, что $v^{(\tau)}(\tau, x_N^{\tau *})$ гарантирует индивидуальную рациональность на всем интервале игры.

Если условие (1.4.3) выполнено, принцип оптимальности − распределение дохода в соответствии с вектором Шепли − существует в каждый момент на всем протяжении игры вдоль оптимальной траектории, выбранной изначально. Следовательно, состоятельность во времени имеет место, и ни одна из фирм не имеет причин покинуть совместное предприятие. Таким образом, динамический принцип дележа, приведенный в (1.4.2) динамически устойчив или состоятелен во времени.

В нашем случае доля дохода *i*-й фирмы в соответствии с вектором Шепли принимает вид:

$$v^{(\tau)i}(\tau, x_N^\tau) = \frac{1}{6}W^{(\tau)i}(\tau, x_i^\tau) + \frac{1}{3}\left(W^{(\tau)\{i,j\}}(\tau, x_{\{i,j\}}^\tau) - W^{(\tau)j}(\tau, x_j^\tau)\right) +$$

$$\frac{1}{3}\left(W^{(\tau)\{i,k\}}(\tau, x_{\{i,k\}}^\tau) - W^{(\tau)k}(\tau, x_k^\tau)\right) + \frac{1}{6}\left(W^{(\tau)\{i,j,k\}}(\tau, x_{\{i,j,k\}}^\tau) - W^{(\tau)\{j,k\}}(\tau, x_{\{j,k\}}^\tau)\right)$$

$$i, j, k \in N = \{1,2,3\} \quad \tau \in [t_0, T] \qquad (1.4.3)$$

1.5 Процедура распределения дележа

Для того чтобы реализовать вектор Шепли, представленный в предыдущем пункте, необходимо в каждый момент компенсировать переходные изменения, чтобы вектор Шепли поддерживался на всем интервале игры. Иначе говоря, необходимо в каждый момент перераспределять полученную совместную прибыль. Для этого компоненты вектора Шепли представляются в следующем виде:

$$v^{(t_0)i}(t_0, x_N^0) = \sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\left[W^{(t_0)K}(t_0, x_K^0) - W^{(t_0)K\backslash i}(t_0, x_{K\backslash i}^0)\right] =$$

$$= \int_{t_0}^{T} B_i(s) \exp\left[-\int_{t_0}^{s} r(y)dy\right] ds +$$

$$+ \exp\left[-\int_{t_0}^{T} r(y)dy\right] q^i(x_i^*(T)) \qquad (1.5.1)$$

Здесь $B_i(s)$ − платеж, получаемый фирмой *i* в момент *s* после перераспределения совместной мгновенной прибыли.

Более того, для $i \in N$ и $t \in [t_0, T]$

$$v^{(t_0)i}(t, x_N^{t*}) =$$

$$\int_{t}^{T} B_i(s) \exp\left[-\int_{t_0}^{s} r(y)dy\right] ds + \exp\left[-\int_{t_0}^{T} r(y)dy\right] q^i(x_i^*(T)) \qquad (1.5.2)$$

− доход игрока *i* от кооперации на временном интервале $[t, T]$, где x_N^{t*} − состояние игры в момент $t \in [t_0, T]$.

Необходимое условие, чтобы $v^{(t_0)i}(t, x_N^{t*})$ удовлетворяло условию (1.5.2):

$$v^{(t_0)i}(t, x_N^{t*}) = v^{(t)i}(t, x_N^{t*}) \exp\left[-\int_{t_0}^{T} r(y)dy\right]$$

$$i \in N, \quad t \in [t_0, T] \qquad (1.5.3)$$

Нужно найти такое $B_i(s)$, при котором $v^{(t_0)i}(t, x_N^{t*})$ удовлетворяет (1.5.1)-(1.5.3).

Отметим, что в каждый момент происходит только перераспределение прибыли, поэтому сумма доходов игроков остается неизменной, т.е.

$$\sum_{i=1}^{3} B_i(s) = \sum_{i=1}^{3}[P_i x_i^{1/2}(s) - c_i u_i(s)], \quad s \in [t_0, T] \qquad (1.5.4)$$

Данный динамический анализ был подробно рассмотрен в книге [Yeung, Petrosjan, 2006]. В общем случае прибыль, получаемая игроком i в момент $\tau \in [t_0, T]$, равна:

$$B_i(\tau) =$$
$$-\sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \Big\{ \Big[W_t^{(\tau)K}(\tau, x_K^{\tau})\big|_{t=\tau} \Big] - \Big[W_t^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_{K\backslash i}^{\tau})\big|_{t=\tau} \Big]$$
$$+ \Big(\Big[W_{x_N^{\tau*}}^{(\tau)K}(\tau, x_K^{\tau})\big|_{t=\tau} \Big] - \Big[W_{x_N^{\tau*}}^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_{K\backslash i}^{\tau})\big|_{t=\tau} \Big] \Big) \times f^N \Big[\tau, x_N^{\tau*}, u_i^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \Big] \Big\} \qquad (1.5.5),$$

Поскольку частная производная $W^{(\tau)K}(\tau, x_K^{\tau*})$ по x_j, где $j \notin K$ уходит, мы можем переписать (1.5.5) более лаконично:

$$B_i(\tau) =$$
$$-\sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \Big\{ \Big[W_t^{(\tau)K}(\tau, x_K^{\tau})\big|_{t=\tau} \Big] - \Big[W_t^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_{K\backslash i}^{\tau})\big|_{t=\tau} \Big]$$
$$+ \sum_{j \in K} \Big[W_{x_j^{\tau*}}^{(\tau)K}(\tau, x_K^{\tau})\big|_{t=\tau} \Big] f_j^N \Big[\tau, x_N^{\tau*}, u_i^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \Big]$$
$$- \sum_{h \in K\backslash i} \Big[W_{x_h^{\tau*}}^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_{K\backslash i}^{\tau})\big|_{t=\tau} \Big] f^N \Big[\tau, x_N^{\tau*}, u_i^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \Big] \Big\} =$$
$$-\sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \Big\{ \Big[W_t^{(\tau)K}(\tau, x_K^{\tau})\big|_{t=\tau} \Big] - \Big[W_t^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_{K\backslash i}^{\tau})\big|_{t=\tau} \Big]$$
$$+ \Big[W_{x_K^{\tau*}}^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_K^{\tau})\big|_{t=\tau} \Big] f_K^N \Big[\tau, x_N^{\tau*}, u_i^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \Big]$$
$$- \Big[W_{x_{K\backslash i}^{\tau*}}^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_{K\backslash i}^{\tau})\big|_{t=\tau} \Big] f_{K\backslash i}^N \Big[\tau, x_N^{\tau*}, u_i^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \Big], \qquad (1.5.6)$$

где $f_K^N \big[\tau, x_N^{\tau*}, u_i^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \big]$ есть вектор-столбец, содержащий $f_i^N \big[\tau, x_N^{\tau*}, u_i^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \big]$ для $i \in K$.

В нашем случае функция $B_i(\tau)$ имеет вид:

$$B_i(\tau) =$$
$$(-1) \cdot \Bigg(\frac{1}{3} \Big(W_t^{(\tau)i}(\tau, x_i^{\tau}) + W_{x_i}^{(\tau)i}(\tau, x_i^{\tau}) \cdot f_i^N \Big[\tau, x_N^{\tau*}, u_i^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \Big] \Big) +$$
$$\frac{1}{6} \Big(W_t^{(\tau)\{i,j\}}(\tau, x_{\{i,j\}}^{\tau}) - W_t^{(\tau)j}(\tau, x_j^{\tau}) + W_{x_i}^{(\tau)\{i,j\}}(\tau, x_{\{i,j\}}^{\tau}) \cdot f_i^N \Big[\tau, x_N^{\tau*}, u_{\{i,j\}}^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \Big]$$
$$+ W_{x_j}^{(\tau)\{i,j\}}(\tau, x_{\{i,j\}}^{\tau}) \cdot f_j^N \Big[\tau, x_N^{\tau*}, u_{\{i,j\}}^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \Big] - W_{x_i}^{(\tau)j}(\tau, x_j^{\tau}) \cdot f_j^N \Big[\tau, x_N^{\tau*}, u_j^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \Big] \Big)$$
$$\frac{1}{6} \Big(W_t^{(\tau)\{i,k\}}(\tau, x_{\{i,k\}}^{\tau}) - W_t^{(\tau)k}(\tau, x_k^{\tau}) + W_{x_i}^{(\tau)\{i,k\}}(\tau, x_{\{i,k\}}^{\tau}) \cdot f_i^N \Big[\tau, x_N^{\tau*}, u_{\{i,k\}}^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*}) \Big]$$

$$+W_{x_k}^{(\tau)\{i,k\}}(\tau,x_{\{i,k\}}^{\tau})\cdot f_k^N\left[\tau,x_N^{\tau*},u_k^{(\tau)N*}(\tau,x_N^{\tau*})\right]-W_{x_k}^{(\tau)k}(\tau,x_k^{\tau})\cdot f_k^N\left[\tau,x_N^{\tau*},u_k^{(\tau)N*}(\tau,x_N^{\tau*})\right]\Big)$$

$$\frac{1}{3}\Big(W_t^{(\tau)\{i,j,k\}}(\tau,x_N^{\tau})-W_t^{(\tau)\{j,k\}}(\tau,x_{\{j,k\}}^{\tau})+W_{x_i}^{(\tau)\{i,j,k\}}(\tau,x_N^{\tau})\cdot f_i^N\left[\tau,x_N^{\tau*},u_N^{(\tau)N*}(\tau,x_N^{\tau*})\right]$$

$$+W_{x_j}^{(\tau)\{i,j,k\}}(\tau,x_N^{\tau})\cdot f_j^N\left[\tau,x_N^{\tau*},u_N^{(\tau)N*}(\tau,x_N^{\tau*})\right]+W_{x_k}^{(\tau)\{i,j,k\}}(\tau,x_N^{\tau})\cdot f_k^N\left[\tau,x_N^{\tau*},u_N^{(\tau)N*}(\tau,x_N^{\tau*})\right]$$

$$-W_{x_j}^{(\tau)\{j,k\}}(\tau,x_N^{\tau})\cdot f_j^N\left[\tau,x_N^{\tau*},u_{\{j,k\}}^{(\tau)N*}(\tau,x_N^{\tau*})\right]-W_{x_k}^{(\tau)\{j,k\}}(\tau,x_N^{\tau})\cdot f_k^N\left[\tau,x_N^{\tau*},u_{\{j,k\}}^{(\tau)N*}(\tau,x_N^{\tau*})\right]\Big)\Big)$$

Вектор $B_i(s)$, полученный из процедуры распределения дохода, гарантирует реализуемость дележа согласно вектору Шепли на всем протяжении игры. Таким образом, мгновенные выплаты $B_i(\tau,x_N^{\tau*})$ игроку $i\in N$ обеспечивают динамическую устойчивость совместного предприятия.

1.6. Результаты количественного моделирования

Подтвердим полученные математические выводы результатами численных расчетов.

Для начала рассмотрим симметричный случай, когда все 3 компании имеют одинаковые параметры.

Все вычислительные процессы проводились в программной среде MAPLE.

Пусть

t_0 = 0 − начальный момент игры.

T = 20 − конечный момент игры.

r = 0.2 − размер дисконта.

δ = 0.05 − уровень устаревания технологий.

c_1 = 0.5, c_2 = 0.5, c_3 = 0.5 − константы, определяющие инвестиционный вклад игроков в технологическое развитие.

q_1 = 0.1, q_2 = 0.1, q_3 = 0.1 − константы, определяющие ликвидационную стоимость технологий игроков на момент конца игры.

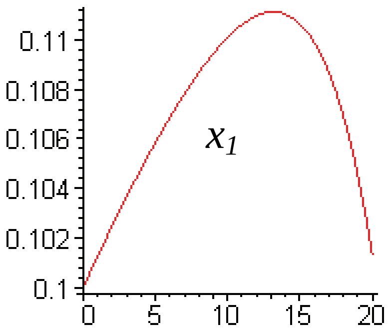
P_1 = 0.1, P_2 = 0.1, P_3 = 0.1 − константы, определяющие чистую операционную прибыль игроков.

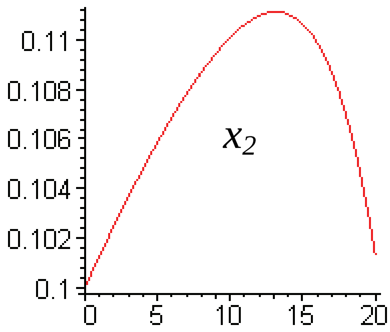
α_1 = 0.3, α_2 = 0.3, α_3 = 0.3 − константы, определяющие прибавку в технологии игроков.

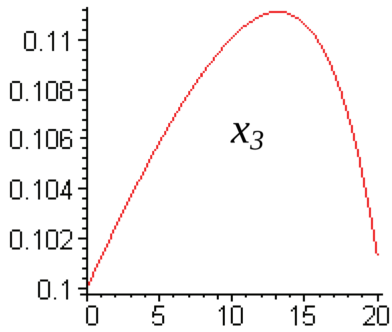
$b_1^{[2,1]}=b_1^{[3,1]}=b_2^{[1,2]}=b_2^{[3,1]}=b_3^{[1,3]}=b_3^{[2,3]}=0.1$ − константы, представляющие собой эффекты передачи технологий между компаниями.

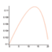
Графики динамики состояний игроков, действующих индивидуально, выглядят так:

1-я компания 2-я компания 3-я компания



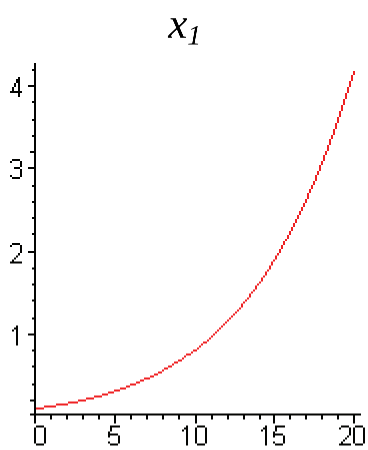


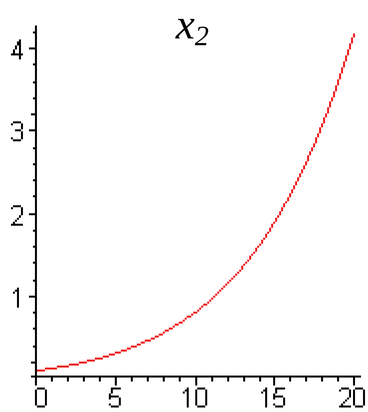


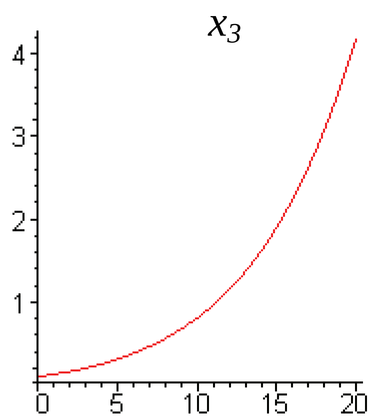


Как мы видим развитие всех компаний одинаково.
В совместном предприятии развития уровней технологий компаний во времени также равны между собой:

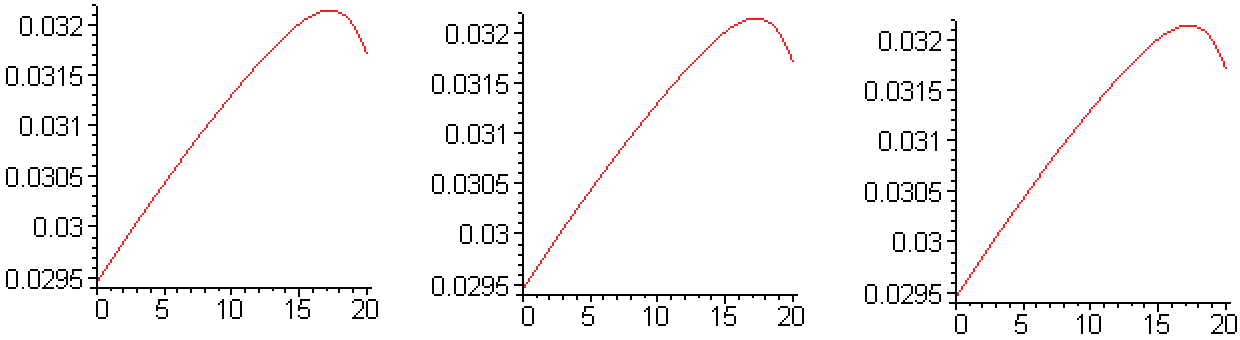
1-я компания 2-я компания 3-я компания





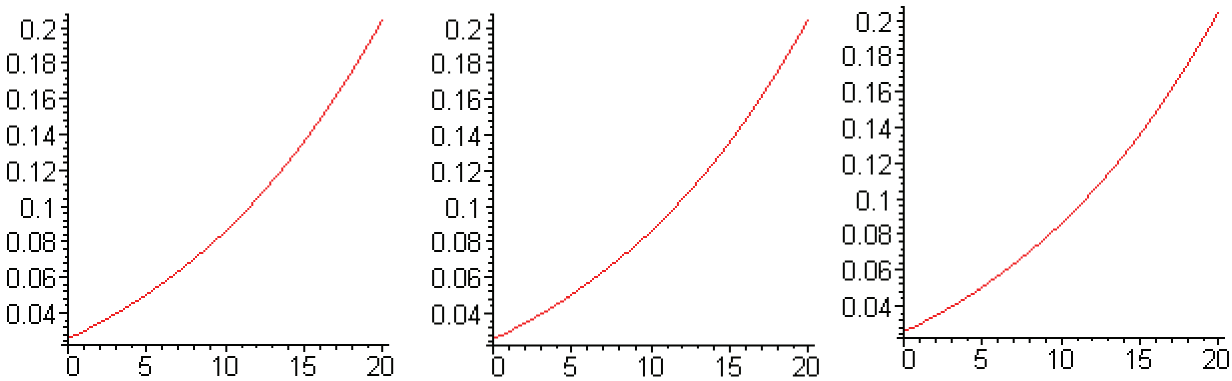


Графики прибыли компаний во времени представлены ниже. Они также одинаковы как для индивидуального случая,



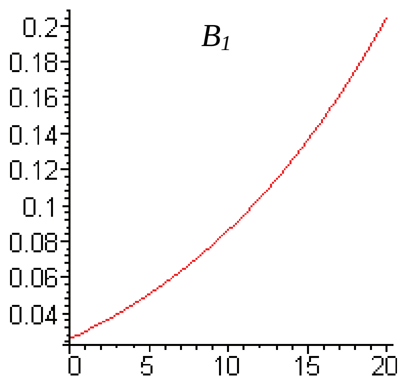
так и для совместного предприятия:

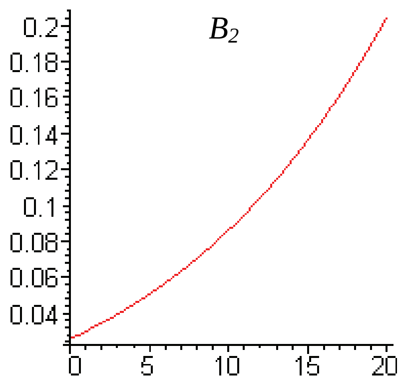
1-я компания 2-я компания 3-я компания

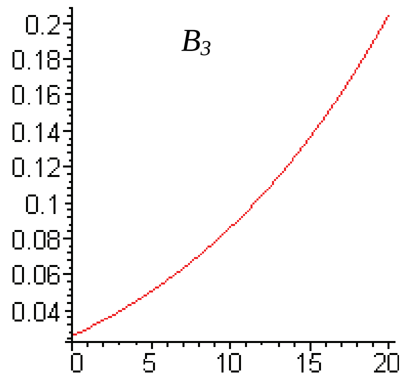


Для симметричного случая прибыль в соответствии с вектором Шепли должна распределяться между игроками одинаково, следовательно, здесь мы не должны наблюдать перераспределения дохода. Графики функций $B_i(t)$ это подтверждают:

1-я компания 2-я компания 3-я компания







Проверим корректность наших вычислений и убедимся, что прибыль, полученная каждой компанией до перераспределения, равна прибыли этой же компании после перераспределения. Обозначим через

$$\Pr_i(t) = P_i[x_i(t)]^{1/2} - c_i u_i(t) \qquad (1.6.1)$$

прибыль компании i в момент t до перераспределения выигрышей.

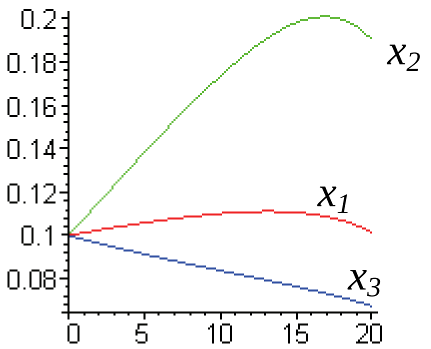
В данном примере не происходит перераспределения прибыли. Различие в последних цифрах − погрешность вычислений.
Нам следует также проверить поддержание вектора Шепли на всем интервале существования совместного предприятия, т.е. мы должны проверить выполнения равенства:

$$v^{(t_0)i}(t, x_N^t) = \int_t^T B_i(s)\exp[-r(s-t_0)]ds + \exp[-r(T-t_0)]q_i[x_i(T)]^{1/2} \qquad (1.6.2)$$
$$i \in N, t \in [t_0, T]$$

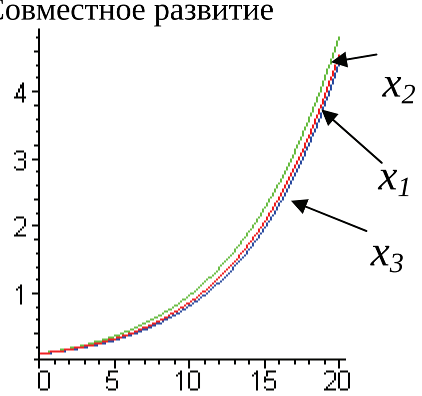
Так как правая часть равенства (1.6.2) зависит только от момента t, обозначим ее через $\mathrm{Ob}_i(t)$. Компоненты вектора Шепли для простоты обозначим через $v_i(t)$.
Результаты вычислений представлены в приложении 2. Равенство выполняется, хотя погрешности вычислений здесь более существенны. Таким образом, в симметричном случае вектор Шепли будет динамически устойчив.

Рассмотрим асимметричный случай. Сначала изменим параметр *P*. Пусть теперь $P_1 = 0.1$, $P_2 = 0.2$, $P_3 = 0.05$. Посмотрим, как изменится динамика состояний игроков и их выигрыши. Ниже представлены графики динамики состояний игроков для всех возможных коалиций в игре:

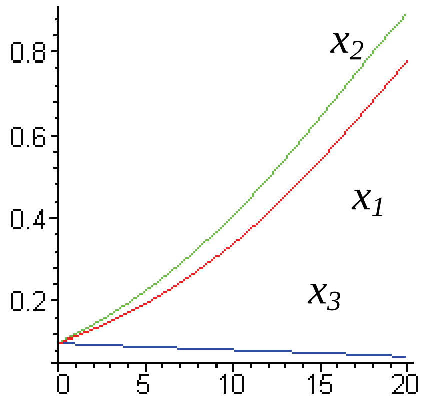
Индивидуальное развитие



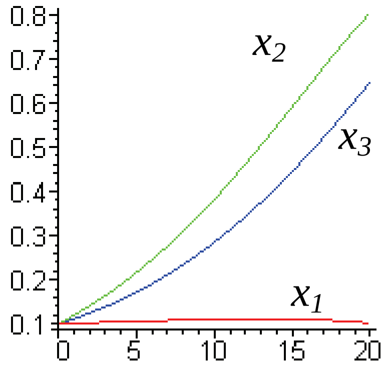
Совместное развитие



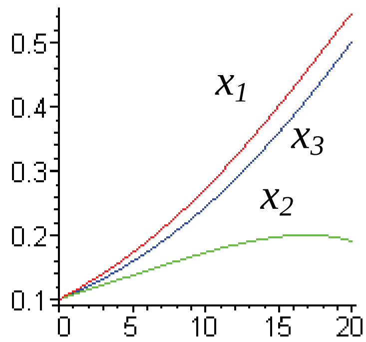
Объединение 1 и 2



Объединение 3 и 2

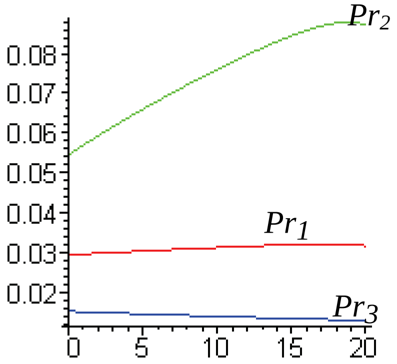


Объединение 1 и 3

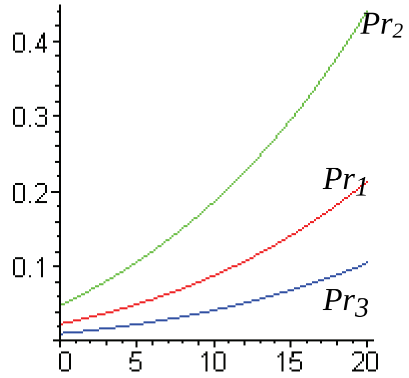


Далее представлены графики прибыли компаний на протяжении игры для всех возможных коалиций:

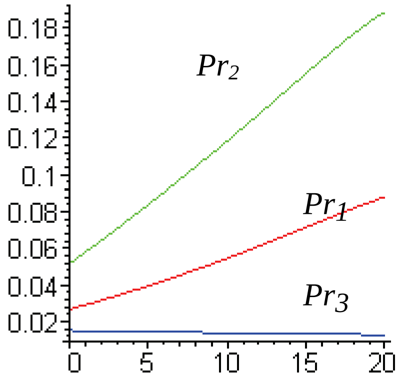
Индивидуальная прибыль



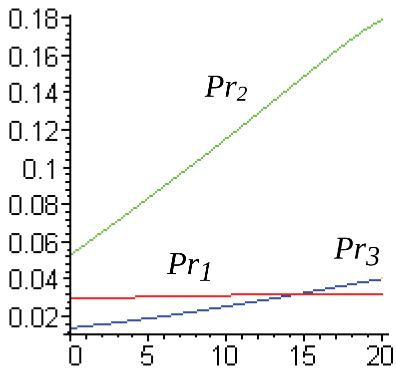
Совместная прибыль



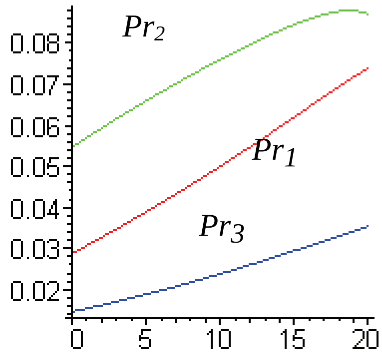
Объединение 1 и 2



Объединение 3 и 2

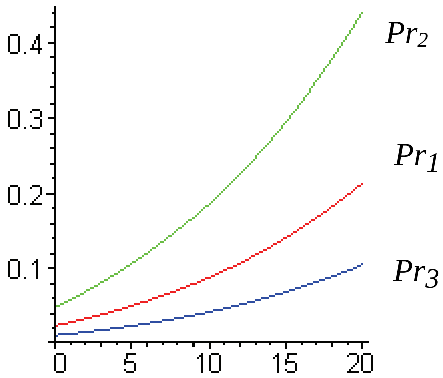


Объединение 1 и 3

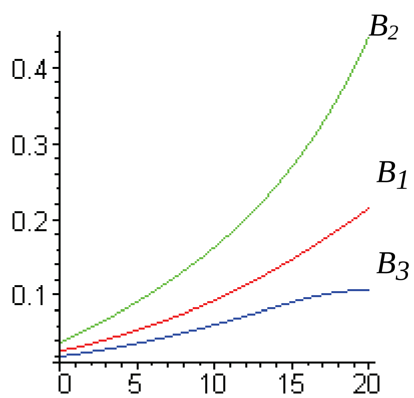


Ниже представлены графики прибылей компаний в совместном предприятии без и после перераспределения прибыли:

Без перераспределения



С перераспределением



Как мы видим, в данном случае имеет место перераспределение доходов от кооперации. Это наблюдается в различные моменты времени. Имеет место различие в величинах, но сумма доходов остается неизменной за вычетом погрешности вычисления. Итак, в данном случае происходит перераспределения доходов компаний, и строится новое решение, которое является динамически устойчивым. Анализ количественных данных также подтверждает выполнение свойств стратегической устойчивости и защиты от иррационального поведения. Таким образом, анализ результатов количественного моделирования подтверждает корректность изложенных выше теоретических результатов.

2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТОЙЧИВОГО СОВМЕСТНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Теперь рассмотрим модель совместного предприятия при стохастической динамике.

2.1. Обобщенный винеровский процесс

Известно, что переменные, которые с течением времени меняют свое значение случайным образом, следуют стохастическому процессу. Стохастические процессы могут быть классифицированы как процессы с дискретным и непрерывным временем.

Обобщенный процесс Винера имеет вид:

$$dx = adt + bdz, \tag{2.1.1}$$

где a и b – константы, а величина dz равна:

$$dz = \theta\sqrt{dt}$$

где θ- случайная величина, подчиняющаяся закону нормального распределения.

Слагаемое adt предполагает, что средний ожидаемый темп роста величины x в единицу времени есть a. Без второго слагаемого в правой части, процесс (2.1.1) имеет вид

$$dx = adt$$

или

$$x = x_0 + at,$$

где x_0 – значение x при $t = 0$. На временном интервале длины T, x увеличивается на величину aT. Слагаемое bdz в правой части (2.1.1) имеет смысл шума в развитии данного процесса. Эта неопределенность описывается процессом Винера и характеризуется величиной b.

В малые промежутки времени Δt изменение значения x, Δx, из свойства 1 и (1.2) имеет вид:

$$\Delta x = a\Delta t + b\theta\sqrt{\Delta t}, \tag{2.1.2}$$

где θ, как и прежде, случайная величина, подчиняющаяся закону нормального распределения.

Уравнение (2.1.2) описывает обобщенный процесс Винера в дискретном случае.

Необходимо заметить, что состояния обобщенного процесса Винера при положительном x_0 в будущем могут принимать отрицательные значения.

Дальнейшее развитие идеи процесса Винера приводит к процессу Ито, в котором коэффициенты a и b являются функциями переменной x и времени t:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{2.1.3}$$

Известно, что такой процесс описывает многие физические (броуновское движение частицы под действием силы тяжести) и экономические законы (формирования цен на акции, уровень инфляции).
В дискретном случае процесс Ито, может быть представлен следующим образом:

$$\Delta x = a(x,t)dt + b(x,t)\theta\sqrt{\Delta t}\,. \qquad (2.1.4)$$

В приведенной ниже модели будет применяться уравнение (2.1.3), а для его аппроксимации при численном моделировании применяется (2.1.4).

2.2. Стохастическая модель совместного предприятия

Мы вновь рассматриваем случай, когда три фирмы объединяются на некоторый интервал времени $[t_0, T]$ в совместное предприятие с целью максимизации совместной прибыли. Но в данном случае в развитии фирм появляется неопределенность, характеризуемая случайным процессом. Прибыль *i*-й фирмы на этом интервале определяется формулой

$$E_{t_0}\left\{\int_{t_0}^{T}\left[P_i[x_i(s)]^{1/2} - c_i u_i(s)\right]\exp[-r(s-t_0)]ds + \exp[-r(T-t_0)]q_i[x_i(T)]^{1/2}\right\}$$

$$i \in N = \{1,2,3\} \qquad (2.2.1)$$

Все параметры аналогичны тем, что описаны в детерминированной модели. Здесь:
P_i , c_i , и q_i – положительные константы, r – константа, определяющая размер дисконта;
$x_i(s) \subset R^+$ − уровень технологий компании i в момент s, который мы будем называть состоянием игрока i;
$u_i(s) \subset R^+$ − инвестиции в технологическое развитие, эту величину мы будем называть управлением игрока i;
$P_i[x_i(s)]^{1/2}$ − чистая операционная прибыль компании i при технологическом уровне $x_i(s)$;
$c_i u_i(s)$ − стоимость инвестиций,
$q_i[x_i(T)]^{1/2}$ − ликвидационная стоимость технологии компании i в момент T.
Развитие технологии *i*-й фирмы протекает согласно дифференциальному уравнению Ито:

$$dx_i(s) = \left[\alpha_i[u_i(s)x_i(s)]^{1/2} - \delta x_i(s)\right]ds + \sigma_i x_i(s)dz_i(s) \qquad (2.2.2),$$

$$x_i(t_0) = x_i^0,\ i \in N = \{1,2,3\}$$

где $\alpha_i [u_i(s) x_i(s)]^{1/2}$ − прибавка в технологии, полученная при размере инвестирования $u_i(s)$, δ – параметр устаревания технологии. Последнее слагаемое в правой части представляет собой неопределенность в развитии, так называемый «белый шум»:
$dz_i(s) = \theta_i \sqrt{ds}$ – стандартный винеровский процесс, где θ_i − случайная величина, подчиняющаяся закону стандартного нормального распределения, а σ_i - положительная константа, определяющая среднюю величину шума.
Если несколько фирм объединяются для максимизации совместной прибыли, фирма-участник может получить дополнительные возможности в развитии. Соответственно динамика развития технологии фирм изменяется. В случае, когда все три фирмы объединяются в совместное предприятие, развитие фирмы *i* принимает вид

$$dx_i(s) = \alpha_i [u_i(s) x_i(s)]^{1/2} + b_j^{[j,i]} [x_j(s) x_i(s)]^{1/2} + b_k^{[k,i]} [x_k(s) x_i(s)]^{1/2} - \delta x_i(s)$$
$$+ \sigma_i x_i(s) dz_i(s)$$
$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i, j, k \in N = \{1,2,3\}, i \neq j \neq k \qquad (2.2.3),$$

где $b_j^{[j,i]}$ и $b_k^{[k,i]}$ − положительные константы, представляющие эффект передачи технологии для фирмы *i*, от фирм *j* и *k*. Последнее слагаемое в правой части также, как и в индивидуальном случае «белый шум». Прибыль совместного предприятия определяется математическим ожиданием от суммы прибылей входящих в него

$$E_{t_0} \left\{ \int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{3} \left[P_i [x_i(s)]^{1/2} - c_i u_i(s) \right] \exp[-r(s - t_0)] ds \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{3} \exp[-r(T - t_0)] q_i [x_i(T)]^{1/2} \right\}$$
$$i \in N = \{1,2,3\} \qquad (2.2.4)$$

2.3. Выигрыш коалиции в стохастическом случае

Предполагаемая прибыль коалиции *K* определяется максимизацией математического ожидания:

$$E_{t_0} \left\{ \int_{t_0}^{T} \sum_{i \in K} \left[P_i [x_i(s)]^{1/2} - c_i u_i(s) \right] \exp[-r(s - t_0)] ds \right.$$
$$\left. + \sum_{i \in K} \exp[-r(T - t_0)] q_i [x_i(T)]^{1/2} \right\}, \qquad (2.3.1)$$

При этом:

$$dx_i(s) = \left[\alpha_i \left[u_i(s)x_i(s)\right]^{1/2} + \sum_{j \in K, j \neq i} b_j^{[j,i]} \left[x_j(s)x_i(s)\right]^{1/2} - \delta x_i(s) \right] ds$$
$$+ \sigma_i x_i(s) dz_i(s),$$
$$x_i(t_0) = x_i^0, \; i \in K \subset N = \{1,2,3\} \qquad (2.3.2)$$

Для простоты записи перепишем (2.3.2) в виде:

$$dx_K(s) = f^K[s, x_i(s), u_K^{(t_0)K*}(s, x_K(s))]ds + \sigma_K x_K(s) dz_K(s), \qquad (2.3.3)$$

Здесь $dx_K(s) = \{dx_i(s)\}_{i \in K}$, $dz_N(s) = \{dz_i(s)\}_{i \in K}$,

$$f^K(s) = \left\{ f_i^K(s) \right\}_{i \in K} =$$
$$\left\{ \alpha_i \left[u_i(s)x_i(s)\right]^{1/2} + \sum_{j \in K, j \neq i} b_j^{[j,i]} \left[x_j(s)x_i(s)\right]^{1/2} - \delta x_i(s) \right\}_{i \in K}$$
$$\sigma_K x_K(s) = \{\sigma_i x_i(s)\}_{i \in K}$$

Обозначим за $\Gamma[K; t_0, x_0]$ стохастическую проблему оптимального управления (2.3.1)-(2.3.3). Решение данной задачи также было описано в [Yeung, Petrosjan, 2006]. Его теорема, сформулированная для детерминированного случая, была применена им для решения данной задачи. Она звучит так:

Теорема 2.3.1.

Множество оптимальных управлений $\{u_K^*(t)\}$ дает множество оптимальных решений задачи $\Gamma[K; t_0, x_K^0]$, если существует непрерывно дифференцируемая функция $W^{(t_0)K}(t, x_K) : [t_0, T] \times \Pi_{j \in K} R^{m_j} \to R$, являющаяся решением уравнения Беллмана:

$$-W_t^{(t_0)K}(t, x_K) - \frac{1}{2} \sum_{h,\zeta=1}^{m} \Omega_K^{h\zeta}(t, x_K) W_{x^h x^\zeta}^{(t_0)K}(t, x_K) =$$
$$\max_{u_K} \left\{ \sum_{j \in K} g^j \left[t, x_j, u_j\right] \exp\left[-\int_{t_0}^{t} r(y)dy\right] \right.$$
$$\left. + \sum_{j \in K} W_{x_j}^{(t_0)K}(t, x_K) f_j^K \left[t, x_K, u_j\right] \right\},$$
$$W^{(t_0)K}(T, x_K) = \sum_{j \in K} \exp\left[-\int_{t_0}^{T} r(y)dy\right] q^j(x_j),$$

где $g^i[t, x_i, u_i] \exp\left[-\int_{t_0}^{t} r(y)dy\right]$ – мгновенная прибыль игрока *i* в момент *t*, дисконтированная на данный момент. $\Omega_K(t, x_K)$ - матрица с элементами $\sigma_i x_i(s), \; i \in K \subseteq N$, лежащими на диагонали и с нулями не на ней. $\Omega_K^{h\zeta}(t,x_K)$ – это элемент в строке h и в столбце ζ матрицы $\Omega_K(t,x_K)$.

Функция $W^{(t_0)K}(t,x_K)$, как и в предыдущем случае, определяет максимальный выигрыш коалиции K на временном промежутке $[t,T]$, $\quad t_0 \le t \le T$

Рассмотрим задачу $\Gamma[K;\tau,x_K^\tau]$, которая начинается в момент $\tau \in [t_0,T]$ в начальном состоянии x_K^τ. Используя теорему, можно показать, что:

$$\exp\left[\int_\tau^t r(y)dy\right]W^{(\tau)K}(t,x_K^t) = W^{(t)K}(t,x_K^t), \quad t_0 \le \tau \le t \le T$$

$$u_K^{(\tau)K*}(t,x_K^t) = u_K^{(t)K*}(t,x_K^t), \quad t_0 \le \tau \le t \le T$$

Также, как и в детерминированном случае, во-первых, уровень технологии фирмы i увеличивает доход, так как $g^i[s,x_i(s),u_i(s)]$ и $q^i(x_i(T))$ положительно определены от $x_i(t)$, и во-вторых, фирма-участник может получить новые навыки и технологии от другой фирмы в коалиции, поэтому в большинстве случаев имеет место супераддитивность, то есть

$$W^{(\tau)K}(\tau,x_K^\tau) \ge W^{(\tau)L}(\tau,x_L^\tau) + W^{(\tau)K\setminus L}(\tau,x_{K\setminus L}^\tau), \quad L \subset K \subseteq N,$$

где $K \setminus L$ есть относительное дополнение L в K.

В данном случае уравнение Беллмана принимает вид:

$$-W_t^{(t_0)K}(t,x_K^t) - \frac{1}{2}\sum_{i\in K}\sigma_i^2 x_i^2 W_{x_i x_i}^{(t_0)K}(t,x_K) =$$

$$\max_{u_k}\left\{\sum_{i\in K}[P_i x_i^{1/2}(t) - c_i u_i(t)]\exp[-r(t-t_0)] + \sum_{i\in K} W_{x_i}^{(t_0)K}(t,x_K^t) f_i^K[t,x_K^t,u_K^t]\right\}$$

$$W^{(t_0)K}(T,x_K^T) = \sum_{i\in K}\exp[-r(T-t_0)]q_i(x_i(T)); \qquad (2.3.4)$$

$$x_i^*(s) = x_i^0 + \int_{t_0}^t f_i^N[s,x_i(s),u_i^{(t_0)N*}(s,x_N(s))]ds + \int_{t_0}^t \sigma_i[s,x_i(s)]dz_i(s),$$

$i \in N$

Как и в детерминированном случае, нам следует рассмотреть 3 варианта формирования коалиции.

Для одной фирмы уравнение (2.3.4) принимает вид:

$$-W_t^{(t_0)i}(t,x_i) - \frac{1}{2}W_{x_i x_i}^{(t_0)i}(t,x_i)\sigma_i^2 x_i^2 =$$

$$\max_{u_i}\left\{\left[P_i x_i^{1/2} - c_i u_i\right]\exp\left[-r(t-t_0)\right] + W_{x_i}^{(\tau)i}(t,x_i)\left[\alpha_i(u_i x_i)^{1/2} - \delta x_i\right]\right\},$$

$$W^{(t_0)i}(T,x_i) = \exp\left[-r(T-t_0)\right]q_i\left[x_i\right]^{1/2}, \text{ для } i \in \{1,2,3\} \qquad (2.3.5)$$

Из этого уравнения получается оптимальное управление:

$$u_i = \frac{\alpha_i^2}{4(c_i)^2}\left[W_{x_i}^{(t_0)i}(t,x_i)\exp[r(t-t_0)]\right]^2 x_i \text{, для } i \in \{1,2,3\} \qquad (2.3.6)$$

Заменяя u_i в уравнении Беллмана, имеем:

$$-W_t^{(t_0)i}(t,x_i) - \frac{1}{2}W_{x_i x_i}^{(t_0)i}(t,x_i)\sigma_i^2 x_i^2 =$$

$$P_i x_i^{1/2}\exp[-r(t-t_0)] - \frac{\alpha_i^2}{4c_i}\left[W_{x_i}^{(t_0)i}(t,x_i)\right]^2\exp[r(t-t_0)]x_i$$

$$+\frac{\alpha_i^2}{2c_i}\left[W_{x_i}^{(t_0)i}(t,x_i)\right]^2\exp[r(t-\tau)]x_i - \delta W_{x_i}^{(t_0)i}(t,x_i)x_i \text{, для } i \in \{1,2,3\} \qquad (2.3.7),$$

В итоге, решая полученное уравнение, имеем:

$$W^{(t_0)i}(t,x_i) = \left[A_i^{\{i\}}(t)x_i^{1/2} + C_i^{\{i\}}(t)\right]\exp[-r(t-t_0)] \text{, для } i \in \{1,2,3\} \qquad (2.3.8)$$

где

$$\dot{A}_i^{\{i\}}(t) = \left(r + \frac{\sigma_i^2}{8} + \frac{\delta}{2}\right)A_i^{\{i\}}(t) - P_i,$$

$$\dot{C}_i^{\{i\}}(t) = rC_i^{\{i\}}(t) - \frac{\alpha_i^2}{16c_i}\left[A_i^{\{i\}}(t)\right]^2,$$

$$A_i^{\{i\}}(T) = q_i,\ C_i^{\{i\}}(T) = 0 \qquad (2.3.9)$$

Первое уравнение в системе (2.3.9) – как и в первом случае, линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $A_i^{\{i\}}(t)$, которое решается независимо с помощью стандартной техники. Подстановка решения $A_i^{\{i\}}(t)$ во второе уравнение (2.3.9) дает линейное дифференциальное уравнение относительно $C_i^{\{i\}}(t)$, которое затем легко решается. Явное решение здесь не приведено в силу громоздкости записи.

Легко получить:

$$W^{(\tau)i}(t,x_i) = \left[A_i^{\{i\}}(t)x_i^{1/2} + C_i^{\{i\}}(t)\right]\exp[-r(t-\tau)] \qquad (2.3.10)$$

для $i \in \{1,2,3\}$

оптимальное управление для одной фирмы принимает вид:

$$u_i(t) = \frac{\alpha_i^2}{16(c_i)^2}\left[A_i^{\{i\}}(t)\right]^2, \quad i \in \{1,2,3\} \qquad (2.3.11)$$

Соответственно уравнение (2.3.2) принимает вид:

$$dx_i(s) = \left[\frac{\alpha_i^2}{4c_i}A_i^{\{i\}}(s)x_i(s)^{1/2} - \delta x_i(s)\right]ds + \sigma_i x_i(s)dz_i(s),$$

$$x_i(t_0) = x_i^0,\ i \in K \subset N = \{1,2,3\} \qquad (2.3.12)$$

Решая (2.3.12), получаем оптимальные траектории для индивидуального случая.

Если три фирмы образуют совместное предприятие, то уравнение Беллмана принимает вид:

$$-W_t^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}W_{x_ix_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)\sigma_i^2x_i^2=$$

$$\max_{u_i}\left\{\sum_{i=1}^{3}\left[P_ix_i^{1/2}-c_iu_i\right]\exp\left[-r(t-t_0)\right]\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{3}W_{x_i}^{(\tau)i}(t,x_i)\left[\alpha_i(u_ix_i)^{1/2}+b_j^{[j,i]}\left[x_jx_i\right]^{1/2}+b_k^{[k,i]}\left[x_kx_i\right]^{1/2}-\delta x_i\right]\right\},$$

$$W^{(t_0)\{1,2,3\}}(T,x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\exp\left[-r(T-t_0)\right]q_i\left[x_i\right]^{1/2},$$

для $i,j,k\in N=\{1,2,3\},\quad i\neq j\neq k$ (2.3.13)

Проведя максимизацию, получаем:

$$u_i=\frac{\alpha_i^2}{4(c_i)^2}\left[W_{x_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)\exp\left[r(t-t_0)\right]\right]^2x_i,\ i\in\{1,2,3\}\qquad(2.3.14)$$

Подставляя (2.3.14) в (2.3.13), получаем:

$$-W_t^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)+\frac{1}{2}W_{x_ix_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)\sigma_i^2x_i^2=$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left[P_ix_i^{1/2}\exp\left[r(t-t_0)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha_i^2x_i}{4c_i}\left[W_{x_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)\right]^2\exp\left[r(t-t_0)\right]\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{3}W_{x_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)\left[\frac{\alpha_i^2}{2c_i}\left[W_{x_i}^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)\right]^2\exp\left[r(t-t_0)\right]x_i\right.$$

$$\left.+b_j^{[j,i]}\left[x_jx_i\right]^{1/2}+b_k^{[k,i]}\left[x_kx_i\right]^{1/2}-\delta x_i\right]$$

$$W^{(t_0)\{1,2,3\}}(T,x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\exp\left[-r(T-t_0)\right]q_i\left[x_i\right]^{1/2}$$

для $i,j,k\in N=\{1,2,3\},\quad i\neq j\neq k$ (2.3.15)

Решая (2.31), получаем:

$$W^{(t_0)\{1,2,3\}}(t,x_1,x_2,x_3)=\left[A_1^{\{1,2,3\}}(t)x_1^{1/2}+A_2^{\{1,2,3\}}(t)x_2^{1/2}\right.$$

$$\left.+A_3^{\{1,2,3\}}(t)x_3^{1/2}+C^{\{1,2,3\}}(t)\right]\exp\left[-r(t-t_0)\right]\qquad(2.3.16),$$

где $A_1^{\{1,2,3\}}(t),A_2^{\{1,2,3\}}(t),A_3^{\{1,2,3\}}(t)$ и $C^{\{1,2,3\}}(t)$ удовлетворяют

$$\dot{A}_i^{\{1,2,3\}}(t)=\left(r+\frac{\sigma}{8}+\frac{\delta}{2}\right)A_i^{\{1,2,3\}}(t)-\frac{b_i^{[i,j]}}{2}A_j^{\{1,2,3\}}(t)-\frac{b_i^{[i,k]}}{2}A_k^{\{1,2,3\}}(t)-P_i,$$

$i,j,k\in N=\{1,2,3\},\quad i\neq j\neq k$

$$\dot{C}^{\{1,2,3\}}(t) = rC^{\{1,2,3\}}(t) - \sum_{i=1}^{3} \frac{\alpha_i^2}{16c_i} \left[A_i^{\{1,2,3\}}(t)\right]^2,$$

$$A_i^{\{1,2,3\}}(T) = q_i \, , C_i^{\{1,2,3\}}(T) = 0 \qquad (2.3.17)$$

Первые три уравнения в блочно-рекурсивной системе (2.3.17) образуют систему трех линейных дифференциальных уравнений, которая решается явно.

Подстановка решения $\left\{A_i^{\{1,2,3\}}(t)\right\}$ во второе уравнение (2.3.17) дает линейное дифференциальное уравнение относительно $C^{\{1,2,3\}}(t)$.

Оптимальные инвестиционные стратегии в совместном предприятии могут быть получены в виде:

$$u_i^{\{1,2,3\}}(t) = \frac{\alpha_i^2}{16(c_i)^2} \left[A_i^{\{1,2,3\}}(t)\right]^2, \quad i \in \{1,2,3\} \qquad (2.3.18)$$

Динамика траекторий состояний совместного производства на временном интервале $[t_0, T]$ имеет вид:

$$dx_i(s) = \left[\frac{\alpha_i{}^2}{4c_i} A_i^{\{1,2,3\}}(s) x_i(s)^{1/2} + b_j^{[j,i]} \left[x_j(s) x_i(s)\right]^{1/2} \right.,$$

$$\left. + b_k^{[k,i]} \left[x_k(s) x_i(s)\right]^{1/2} - \delta x_i(s) \right] ds + \sigma_i x_i(s) dz_i(s)$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i, j, k \in N = \{1,2,3\}, \, i \neq j \neq k \qquad (2.3.19)$$

Решая полученное уравнение, получаем оптимальные кооперативные траектории.

Если же две из трех фирм решают создать коалицию для максимизации совместной прибыли, то для них уравнение (2.3.4) принимает вид:

$$-W_t^{(t_0)K}(t, x_K^t) - \frac{1}{2} \sum_{i \in K} \sigma_i^2 x_i^2 W_{x_i x_i}^{(t_0)K}(t, x_K) =$$

$$\max_{u_k} \left\{ \sum_{i \in K} [P_i x_i^{1/2}(t) - c_i u_i(t)] \exp[-r(t - t_0)] + \sum_{i \in K} W_{x_i}^{(t_0)K}(t, x_K^t) f_i^K[t, x_K^t, u_K^t] \right\}$$

$$W^{(t_0)K}(T, x_K^T) = \sum_{i \in K} \exp[-r(T - t_0)] q_i(x_i(T));$$

$$K \subset N = \{1,2,3\}; \quad |K| = 2 \qquad (2.3.20)$$

Следуя сделанному выше анализу, мы получаем следующие функции:

$$u_i = \frac{\alpha_i^2}{4(c_i)^2} \left[W_{x_i}^{(t_0)\{i,j\}}(t, x_i, x_j) \exp[r(t - t_0)]\right]^2 x_i, \; i, j \in \{1,2,3\}, \quad i \neq j \qquad (2.3.21)$$

$$W^{(t_0)\{i,j\}}(t, x_i, x_j) = \left[A_i^{\{i,j\}}(t) x_i^{1/2} + A_j^{\{i,j\}}(t) x_j^{1/2} + C^{\{i,j\}}(t)\right] \exp[-r(t - t_0)]$$

$$\{i, j\} \subset \{1,2,3\}, \quad i \neq j \qquad (2.3.22),$$

где $A_i^{\{i,j\}}(t), A_j^{\{i,j\}}(t)$ и $C^{\{i,j\}}(t)$ удовлетворяют

$$\dot{A}_i^{\{i,j\}}(t) = \left(r + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\delta}{2} \right) A_i^{\{i,j\}}(t) - \frac{b_i^{[i,j]}}{2} A_j^{\{i,j\}}(t) - P_i ,$$

$i, j \in N = \{1,2,3\}, \quad i \neq j$

$$\dot{C}^{\{i,j\}}(t) = rC^{\{i,j\}}(t) - \sum_{i=1}^{3} \frac{\alpha_i^2}{16c_i} \left[A_i^{\{i,j\}}(t) \right]^2 ,$$

$$A_i^{\{i,j\}}(T) = q_i , C^{\{i,j\}}(T) = 0 \qquad (2.3.23)$$

Система (2.3.23) решается стандартными методами. Можно получить:

$$W^{(t_0)\{i,j\}}(t, x_i, x_j) = (W^{(\tau)\{i,j\}}(t, x_i, x_j)) \exp\left[-r(\tau - t_0) \right] \qquad (2.3.24)$$

$\{i, j\} \subset \{1,2,3\}, \quad i \neq j$

Оптимальные инвестиционные стратегии для коалиции двух игроков принимают вид:

$$u_i^{\{i,j\}}(t) = \frac{\alpha_i^2}{16(c_i)^2} \left[A_i^{\{i,j\}}(t) \right]^2, \quad i \in K \subset \{1,2,3\}; \quad |K| = 2 \qquad (2.3.25)$$

Динамика траекторий состояний коалиции на временном интервале $[t_0, T]$ имеет вид:

$$dx_i(s) = \left[\frac{\alpha_i^2}{4c_i} A_i^{\{1,2,3\}}(s) x_i(s)^{1/2} + b_j^{[j,i]} \left[x_j(s) x_i(s) \right]^{1/2} \right. ,$$

$$\left. - \delta x_i(s) \right] ds + \sigma_i x_i(s) dz_i(s)$$

$$x_i(t_0) = x_i^0 , \quad i, j \in K \subset N = \{1,2,3\}, i \neq j, \quad |K| = 2 \qquad (2.3.26)$$

Отсюда получаются оптимальные траектории для коалиции двух фирм.

2.4. Вектор Шепли в стохастическом случае

Как и в детерминированном случае, игроки будут делить совместную прибыль в соответствии с вектором Шепли

Для того чтобы максимизировать доход совместного предприятия фирмы будут использовать вектор управлений (2.3.18) на интервале $[t_0, T]$, получая из (2.3.19) соответствующие оптимальные траектории $\{x_N^*(t)\}_{t=t_0}^T$. В момент t_0 и состоянии $x_N^{t_0}$ фирмы договариваются, что доля дохода фирмы i будет:

$$v^{(t_0)i}(t_0, x_N^0) = \sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \left[W^{(t_0)K}(t_0, x_K^0) - W^{(t_0)K \setminus i}(t_0, x_{K \setminus i}^0) \right]$$

$$i \in N \qquad (2.4.1).$$

Для динамической устойчивости необходимо поддерживать вектор Шепли на всем протяжении совместного производства, т.е. для любого момента $\tau \in [t_0, T]$ должно выполняться условие:

$$v^{(\tau)i}(\tau, x_N^\tau) = \sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\left[W^{(\tau)K}(\tau, x_K^\tau) - W^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_{K\backslash i}^\tau)\right] \qquad (2.4.2)$$

Как и раньше, $v^{(\tau)}(\tau, x_N^{\tau*}) = \left[v^{(\tau)1}(\tau, x_N^{\tau*}),\ldots, v^{(\tau)n}(\tau, x_N^{\tau*})\right]$ удовлетворяет основным свойствам дележа:

$$\sum_{i=1}^{n} v^{(\tau)i}(\tau, x_N^{\tau*}) = W^{(\tau)N}(\tau, x_N^{\tau*})$$

$$v^{(\tau)i}(\tau, x_N^{\tau*}) \geq W^{(\tau)i}(\tau, x_N^{\tau*}) \quad i \in N, \tau \in [t_0, T] \qquad (2.4.3).$$

Первая часть в (2.4.2) говорит о том, что $v^{(\tau)}(\tau, x_N^{\tau*})$ удовлетворяет свойству оптимальности по Парето на всем интервале игры. Вторая часть иллюстрирует, что $v^{(\tau)}(\tau, x_N^{\tau*})$ гарантирует индивидуальную рациональность на всем интервале игры. При выполнении условий (2.4.1)-(2.4.3) принцип оптимальности − распределение дохода в соответствии с вектором Шепли − существует в каждый момент на всем протяжении игры вдоль оптимальной траектории, выбранной изначально, и, следовательно, он устойчив на протяжении совместного производства.

В нашем случае ожидаемая доля дохода фирмы будет:

$$v^{(\tau)i}(\tau, x_N^\tau) = \frac{1}{6}W^{(\tau)i}(\tau, x_i^\tau) + \frac{1}{3}\left(W^{(\tau)\{i,j\}}(\tau, x_{\{i,j\}}^\tau) - W^{(\tau)j}(\tau, x_j^\tau)\right) +$$

$$\frac{1}{3}\left(W^{(\tau)\{i,k\}}(\tau, x_{\{i,k\}}^\tau) - W^{(\tau)k}(\tau, x_k^\tau)\right) + \frac{1}{6}\left(W^{(\tau)\{i,j,k\}}(\tau, x_{\{i,j,k\}}^\tau) - W^{(\tau)\{j,k\}}(\tau, x_{\{j,k\}}^\tau)\right)$$

$$i, j, k \in N = \{1,2,3\} \quad \tau \in [t_0, T] \qquad (2.4.4)$$

2.5. Процедура распределения дележа в стохастическом случае

Как и для детерминированного случая в данной модели необходимо компенсировать переходные изменения в доходах фирм, чтобы вектор Шепли поддерживался на всем протяжении совместного производства. Для этого компоненты вектора Шепли представляются в следующем виде:

$$v^{(t_0)i}(t_0, x_N^0) = \sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\left[W^{(t_0)K}(t_0, x_K^0) - W^{(t_0)K\backslash i}(t_0, x_{K\backslash i}^0)\right] =$$

$$= E_{t_0}\left\{\int_{t_0}^{T} B_i(s)\exp\left[-\int_{t_0}^{T} r(y)dy\right]ds\right.$$

$$\left. + q^i(x_i^*(T))\exp\left[-\int_{t_0}^{T} r(y)dy\right]\right\}\Big| x_N(t_0) = x_N^0 \,, \qquad (2.5.1)$$

Здесь, как и в предыдущем случае, $B_i(s)$ − платеж, получаемый фирмой i в момент $s \in [t_0, T]$ после перераспределения дохода.
Более того, для $i \in N$ и $t \in [t_0, T]$:

$$v^{(t_0)i}(t\ , x_N^{t*}) =$$

$$E_{t_0}\left\{\int_t^T B_i(s)\exp\left[-\int_{t_0}^s r(y)dy\right]ds + q^i(x_i^*(T))\exp\left[-\int_{t_0}^T r(y)dy\right] \middle| x_N(t) = x_N^{t*}\right\} \quad (2.5.2)$$

− доход игрока i от кооперации на временном интервале $[t, T]$, где x_N^{t*} − состояние игры в момент $t \in [t_0, T]$.

Чтобы $v^{(t_0)i}(t, x_N^{t*})$ удовлетворяло 2.5.2, необходимо:

$$v^{(t_0)i}(t, x_N^{t*}) = v^{(t)i}(t, x_N^{t*})\exp\left[-\int_{t_0}^T r(y)dy\right]$$

$$i \in N, \quad t \in [t_0, T] \text{ и } x_N^{t*} \in X_N^{t*} \quad (2.5.3)$$

Нужно найти такое $B_i(s)$, при котором $v^{(t_0)i}(t, x_N^{t*})$удовлетворяет (2.5.1)-(2.5.3).

Отметим, что в каждый момент происходит только перераспределение прибыли, поэтому сумма доходов игроков должна оставаться неизменной, но так как здесь мы имеем дела со случайными величинами, то суммы доходов должны совпадать в среднем, т.е.

$$E_s\left\{\sum_{i=1}^3 B_i(s)\right\} = E_s\left\{\sum_{i=1}^3 [P_i x_i^{1/2}(s) - c_i u_i(s)]\right\}, \quad s \in [t_0, T] \quad (2.5.4)$$

В общем случае прибыль, получаемая игроком i в момент $\tau \in [t_0, T]$, равна:

$$B_i(\tau) =$$

$$-\sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\left\{\left[W_t^{(\tau)K}(\tau, x_K^\tau)\big|_{t=\tau}\right] - \left[W_t^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_{K\backslash i}^\tau)\big|_{t=\tau}\right]\right.$$

$$+\left(\left[W_{x_N^{\tau*}}^{(\tau)K}(\tau, x_K^\tau)\big|_{t=\tau}\right] - \left[W_{x_N^{\tau*}}^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_{K\backslash i}^\tau)\big|_{t=\tau}\right]\right) \times f^N\left[\tau, x_N^{\tau*}, u_i^{(\tau)N*}(\tau, x_N^{\tau*})\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{h,\zeta=1}^n \Omega_K^{h\zeta}(\tau, x_\tau^*)\left[W_{x_t^h x_t^\zeta}^{(\tau)K}(t, x_t^*)\big|_{t=\tau}\right]$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{h,\zeta=1}^n \Omega_{K\backslash i}^{h\zeta}(\tau, x_\tau^*)\left[W_{x_t^h x_t^\zeta}^{(\tau)K\backslash i}(t, x_t^*)\big|_{t=\tau}\right]\right\} \quad (2.5.5)$$

Поскольку частная производная $W^{(\tau)K}(\tau, x_K^{\tau*})$по x_j, где $j \notin K$ уходит, мы можем переписать (2.5.5) более лаконично:

$$B_i(\tau) =$$

$$-\sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\left\{\left[W_t^{(\tau)K}(\tau, x_K^\tau)\big|_{t=\tau}\right] - \left[W_t^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_{K\backslash i}^\tau)\big|_{t=\tau}\right]\right.$$

$$+\sum_{j\in K}\left[W^{(\tau)K}_{x^{\tau*}_j}(\tau,x^{\tau}_K)\Big|_{t=\tau}\right]f^N_j\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_i(\tau,x^{\tau*}_N)\right]$$
$$-\sum_{h\in K\backslash i}\left[W^{(\tau)K\backslash i}_{x^{\tau*}_h}(\tau,x^{\tau}_{K\backslash i})\Big|_{t=\tau}\right]f^N_h\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_i(\tau,x^{\tau*}_N)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{h,\zeta=1}^{n}\Omega^{h\zeta}_K(\tau,x^*_\tau)\left[W^{(\tau)K}_{x^h_t x^\zeta_t}(t,x^*_t)\Big|_{t=\tau}\right]$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{h,\zeta=1}^{n}\Omega^{h\zeta}_{K\backslash i}(\tau,x^*_\tau)\left[W^{(\tau)K\backslash i}_{x^h_t x^\zeta_t}(t,x^*_t)\Big|_{t=\tau}\right]\Bigg\} \qquad (2.5.6)$$

где $f^N_K\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_i(\tau,x^{\tau*}_N)\right]$ есть вектор-столбец, содержащий $f^N_i\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_i(\tau,x^{\tau*}_N)\right]$ для $i\in K$.

Для данного примера функция $B_i(\tau)$ принимает вид:

$$B_i(\tau)=$$
$$(-1)\cdot\Bigg(\frac{1}{3}\Big(W^{(\tau)i}_t(\tau,x^\tau_i)+W^{(\tau)i}_{x_i}(\tau,x^\tau_i)\cdot f^N_i\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_i(\tau,x^{\tau*}_N)\right]+\frac{1}{2}\sigma^2_i(x^\tau_i)^2W^{(\tau)i}_{x_ix_i}(\tau,x^\tau_i)\Big)+$$
$$\frac{1}{6}\Big(W^{(\tau)\{i,j\}}_t(\tau,x^\tau_{\{i,j\}})-W^{(\tau)j}_t(\tau,x^\tau_j)+W^{(\tau)\{i,j\}}_{x_i}(\tau,x^\tau_{\{i,j\}})\cdot f^N_i\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_{\{i,j\}}(\tau,x^{\tau*}_N)\right]$$
$$+W^{(\tau)\{i,j\}}_{x_j}(\tau,x^\tau_{\{i,j\}})\cdot f^N_j\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_{\{i,j\}}(\tau,x^{\tau*}_N)\right]-W^{(\tau)j}_{x_i}(\tau,x^\tau_j)\cdot f^N_j\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_j(\tau,x^{\tau*}_N)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\sigma^2_i(x^\tau_i)^2W^{(\tau)\{i,j\}}_{x_ix_i}(\tau,x^\tau_{\{i,j\}})+\frac{1}{2}\sigma^2_j(x^\tau_j)^2W^{(\tau)\{i,j\}}_{x_jx_j}(\tau,x^\tau_{\{i,j\}})-\frac{1}{2}\sigma^2_j(x^\tau_j)^2W^{(\tau)j}_{x_jx_j}(\tau,x^\tau_j)\Big)$$
$$\frac{1}{6}\Big(W^{(\tau)\{i,k\}}_t(\tau,x^\tau_{\{i,k\}})-W^{(\tau)k}_t(\tau,x^\tau_k)+W^{(\tau)\{i,k\}}_{x_i}(\tau,x^\tau_{\{i,k\}})\cdot f^N_i\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_{\{i,k\}}(\tau,x^{\tau*}_N)\right]$$
$$+W^{(\tau)\{i,k\}}_{x_k}(\tau,x^\tau_{\{i,k\}})\cdot f^N_k\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_k(\tau,x^{\tau*}_N)\right]-W^{(\tau)k}_{x_k}(\tau,x^\tau_k)\cdot f^N_k\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_k(\tau,x^{\tau*}_N)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\sigma^2_i(x^\tau_i)^2W^{(\tau)\{i,k\}}_{x_ix_i}(\tau,x^\tau_{\{i,k\}})+\frac{1}{2}\sigma^2_k(x^\tau_k)^2W^{(\tau)\{i,k\}}_{x_kx_k}(\tau,x^\tau_{\{i,k\}})-\frac{1}{2}\sigma^2_k(x^\tau_k)^2W^{(\tau)k}_{x_kx_k}(\tau,x^\tau_k)\Big)$$
$$\frac{1}{3}\Big(W^{(\tau)\{i,j,k\}}_t(\tau,x^\tau_N)-W^{(\tau)\{j,k\}}_t(\tau,x^\tau_{\{j,k\}})+W^{(\tau)\{i,j,k\}}_{x_i}(\tau,x^\tau_N)\cdot f^N_i\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_N(\tau,x^{\tau*}_N)\right]$$
$$+W^{(\tau)\{i,j,k\}}_{x_j}(\tau,x^\tau_N)\cdot f^N_j\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_N(\tau,x^{\tau*}_N)\right]+W^{(\tau)\{i,j,k\}}_{x_k}(\tau,x^\tau_N)\cdot f^N_k\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_N(\tau,x^{\tau*}_N)\right]$$
$$-W^{(\tau)\{j,k\}}_{x_j}(\tau,x^\tau_N)\cdot f^N_j\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_{\{j,k\}}(\tau,x^{\tau*}_N)\right]-W^{(\tau)\{j,k\}}_{x_k}(\tau,x^\tau_N)\cdot f^N_k\left[\tau,x^{\tau*}_N,u^{(\tau)N*}_{\{j,k\}}(\tau,x^{\tau*}_N)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\sigma^2_i(x^\tau_i)^2W^{(\tau)\{i,j,k\}}_{x_ix_i}(\tau,x^\tau_N)+\frac{1}{2}\sigma^2_j(x^\tau_j)^2W^{(\tau)\{i,j,k\}}_{x_jx_j}(\tau,x^\tau_N)+\frac{1}{2}\sigma^2_i(x^\tau_i)^2W^{(\tau)\{i,j,k\}}_{x_kx_k}(\tau,x^\tau_N)$$
$$-\frac{1}{2}\sigma^2_j(x^\tau_j)^2W^{(\tau)\{j,k\}}_{x_jx_j}(\tau,x^\tau_{\{j,k\}})-\frac{1}{2}\sigma^2_k(x^\tau_k)^2W^{(\tau)\{j,k\}}_{x_kx_k}(\tau,x^\tau_{\{j,k\}})\Big)\Bigg)$$

Вектор $B_i(\tau)$, полученный из процедуры распределения дохода, гарантирует реализуемость дележа согласно вектору Шепли на всем протяжении игры. Таким образом, мгновенные выплаты $B_i(\tau,x^{\tau*}_N)$ игроку $i\in N$ обеспечивают динамическую устойчивость совместного предприятия.

2.6. Результаты количественного моделирования

Подтвердим наши выводы численными примерами.

Для того чтобы знать предполагаемое направление развития фирм, зададим те же параметры, что и в детерминированном случае.

Для начала рассмотрим симметричный случай, когда все 3 компании имеют одинаковые параметры.

Пусть:

$t_0 = 0$ − начальный момент игры;

$T = 20$ − конечный момент игры (период существования совместного предприятия);

$r = 0.2$ − размер дисконта;

$\delta = 0.05$ − параметр устаревания технологий;

$c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 0.5$ − параметры инвестиционного вклада игроков в технологическое развитие;

$q_1 = 0.1$, q2 = 0.1, $q_3 = 0.1$ − параметры ликвидационной стоимости технологий игроков на момент окончания процесса;

$P_1 = 0.1$, $P_2 = 0.1$, $P_3 = 0.1$ − константы, определяющие чистую операционную прибыль игроков;

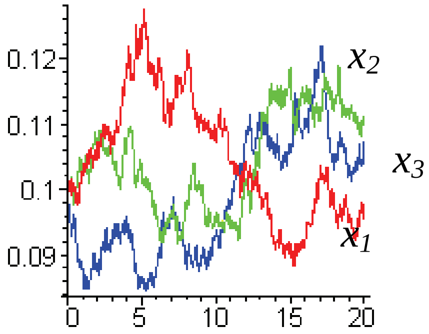
$\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.3$, $\alpha_3 = 0.3$ − константы, определяющие прибавку в технологии игроков;

$b_1^{[2,1]} = b_1^{[3,1]} = b_2^{[1,2]} = b_2^{[3,1]} = b_3^{[1,3]} = b_3^{[2,3]} = 0.1$ − параметры, характеризующие эффекты передачи технологий между участниками совместного предприятия;

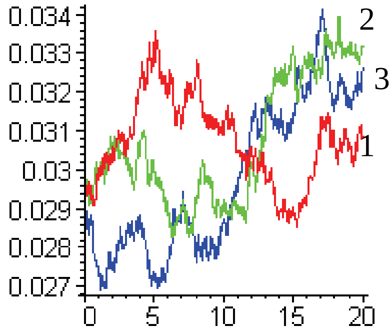
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.05$ - параметры волатильности технологического развития.

Графики изменения состояний и прибылей игроков, действующих индивидуально, при указанных параметрах имеют вид:

Состояния компаний компания



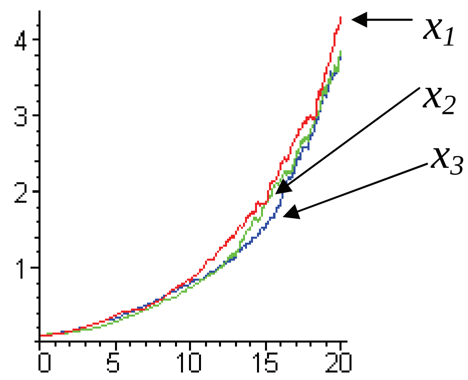
Прибыли компаний



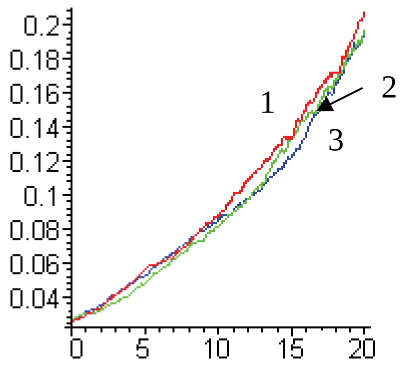
Как мы видим развитие всех компаний неодинаково вследствие случайных отклонений.

При объединении в совместное предприятие траектории технологий компаний и графики прибылей компаний как функции времени приблизительно одинаковы:

Технологии компаний

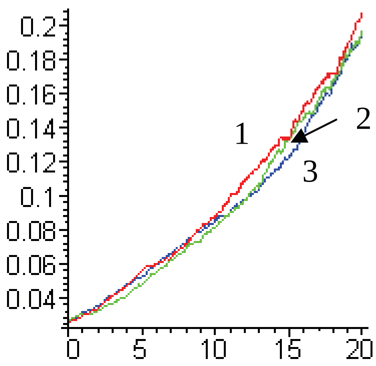


Прибыли компаний

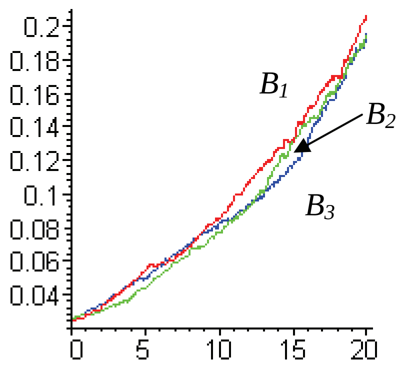


Для симметричного случая прибыль в соответствии с вектором Шепли должна распределяться между игроками одинаково. Поэтому здесь мы не наблюдаем перераспределения дохода при кооперации. Графики функций $B_i(t)$ это подтверждают:

Прибыль до перераспределения



Прибыль после перераспределения



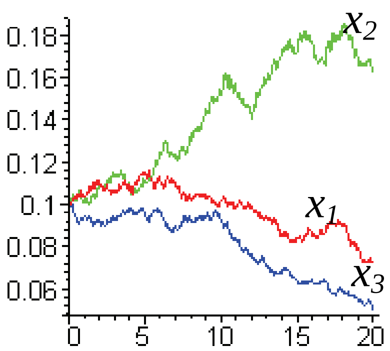
Результаты количественного моделирования подтверждают корректность наших вычислений. В частности, нетрудно убедиться, что прибыль, полученная каждой компанией до перераспределения, равна прибыли этой же компании после перераспределения. Обозначим:

$Pr_i(t) = P_i[x_i(t)]^{1/2} - c_i u_i(t)$ − прибыль i-й компании в момент t до перераспределения. Несмотря на симметричность примера значения прибылей неодинаковы, но перераспределения прибыли не происходит. Различие имеет место из-за случайности доходов.

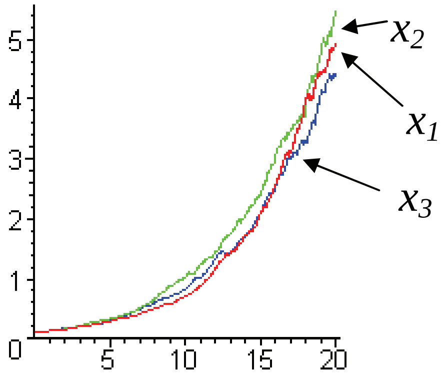
Введем в наш случай асимметрию. Изменим параметр P.

Пусть теперь $P_1 = 0.1$, $P_2 = 0.2$, $P_3 = 0.05$. Посмотрим, как изменится динамика состояний игроков и их выигрыши.
Ниже представлены графики динамики состояний игроков для всех возможных коалиций в игре:

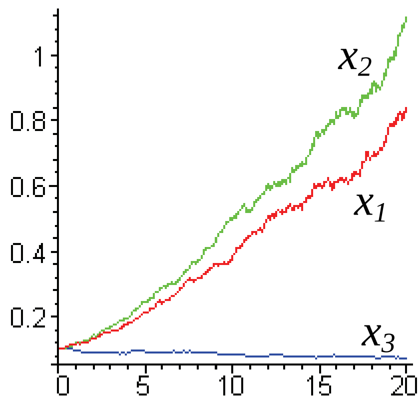
Индивидуальное развитие



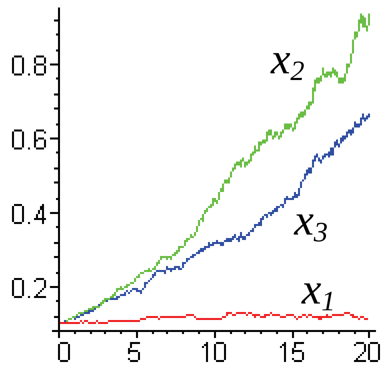
Совместное развитие



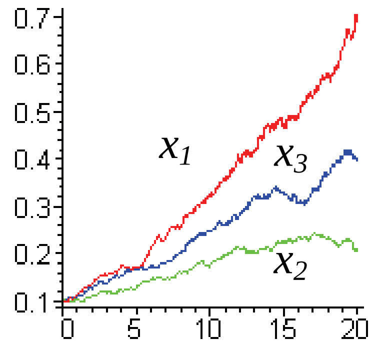
1 и 2



2 и 3



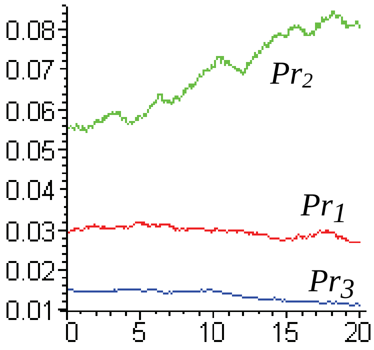
1 и 3



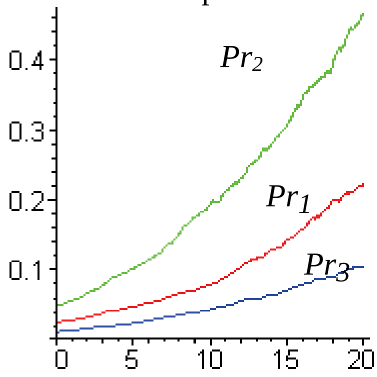
Как видно из графиков, здесь имеет место сильное колебание состояний, из-за чего наблюдаются более сильные отклонения величин.

Далее представлены графики прибыли компаний на протяжении игры для всех возможных коалиций:

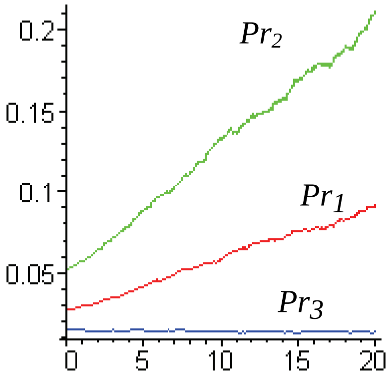
Индивидуальная прибыль



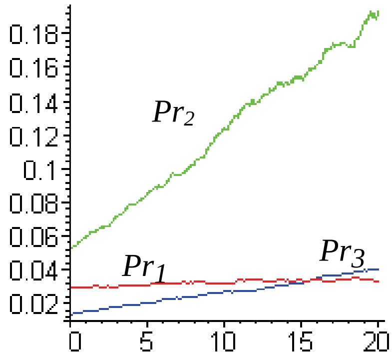
Совместная прибыль



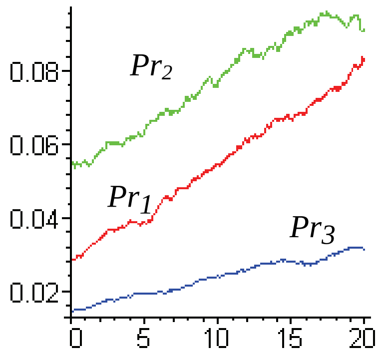
1 и 2



2 и 3

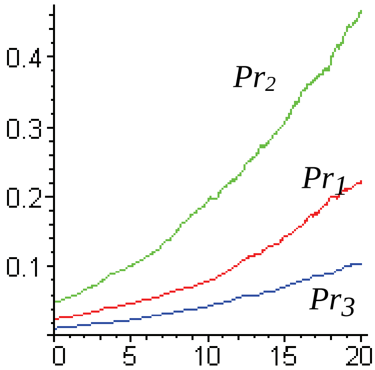


1 и 3

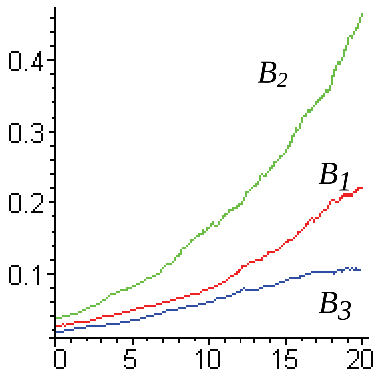


Ниже представлены графики прибылей компаний в совместном предприятии до и после перераспределения:

До перераспределения



После перераспределения



Как мы видим, в данном случае имеет место перераспределение на начальных стадиях, которое затем постепенно глушится. Имеет место различие в величинах, но сумма доходов остается приблизительно неизменной. Следовательно, построенное решение сохраняет динамическую устойчивость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе ранее проведенных исследований показано, что основные кооперативные принципы оптимальности не обладают свойством динамической устойчивости (временной состоятельности), требующим сохранения свойства оптимальности на промежутке его реализации вдоль оптимальной траектории. Нами предложен метод регуляризации (ПРД), основанный на введении нового управления на оптимальной траектории. Результатом применения этого метода в конкретной задаче динамической кооперации является построение управления в виде функции специальных выплат, реализуемого на оптимальной траектории. Таким образом, мы получаем двухэтапную задачу: принятия кооперативного решения в рамках выбранного принципа оптимальности и построение управления для данного кооперативного решения на основе применения ПРД. Кооперативное решение, полученное в результате решения этой двухэтапной задачи, будет обладать свойством динамической устойчивости.

В частном случае исследована модель динамической кооперации при создании совместного предприятия. Получено теоретическое решение задачи и проведено количественное моделирование на основе разработанного математического обеспечения как для случая детерминированной, так и стохастической динамики. Влияние случайных процессов на развитие компаний в совместном предприятии описано с помощью многомерного стохастического процесса Ито. В результате количественного моделирования получено, что при одинаковых значениях параметров и начальных данных ожидаемая прибыль определяется с помощью динамического вектора Шепли, который в симметричном случае является устойчивым решением кооперативной игры. При различных значениях параметров устойчивость вектора Шепли нарушается, и наблюдается непрерывное перераспределение совместной прибыли. В этом случае строится новое решение на основе ПРД, обладающее всеми требуемыми свойствами устойчивости. Дальнейшее исследование предполагается проводить в направлении развития методологии устойчивых долгосрочных соглашений с целью применения ее для анализа стратегических альянсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И.И., Скороход А.В. (1963) Введение в теорию случайных процессов, второе издание.
2. Петросян Л.А.(1977). Устойчивые решения дифференциальных игр со многими участниками. Вестник Ленинградского Университета, 19, с. 46-52
3. Петросян Л.А., Данилов Н.Н.(1982). Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. Издательство Томского Университета, Томск
4. Haurie A. (1976). Springer. A note on nonzero-sum differenrial games with bargaining solutions. In Journal of Optimization Theoryand Application, 18-p 31-39
5. Kidland F.E. and Prescott E.C.(1977) Rules rather than decisions the inconsistency of optimal plans. In Journal of Political Economy, 1977, vol. 85 – p. 473-490
6. Kuhn, H.W. (1953), *Extensive games and the problem of imputation*, in “Contributions to the Theory of Games II” (eds. H.W. Kuhn and A.W. Tucker), Princeton, Princeton University Press, 193–216.
7. Nash, J.F. (1951), *Non-cooperative games*, Ann. Mathematics, **54** 286–295.
8. Neumann, J. and Morgenstern, O. (1947) “Theory of Games and Economic Behavior”, Princeton.
9. Petrosjan, L. “Differential Games of Pursuit”, (1993) World Scientific, Singapore,.
10. Petrosyan L.A.(1993). Differential Games of Pursuit – World Scientific, Singapore
11. Petrosyan L.A.(2003). Bargaining in Dynamic Games. In: Petrosyan L., Yeung D.W.K. (ed) ICM Millenium Lectures on Games– Springer – Verlag, Berlin, p.139-143.
12. Petrosjan, L.A., Zaccour G. (2003). Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction. Journal of economic dynamics and control, 27 (3), 381-398
13. Petrosjan L.A., Zenkevich N.A. (1996). Game Theory. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.: Singapore
14. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A. (2007). Time-consistency of cooperative solutions in management. In: “Contributions to game theory and management”, GSOM, St. Petersburg University Publ., , p. 233-252
15. Petrosjan L.A., Zenkevich N.A. (2009). Stable cooperation. JIMO (in print)
16. Shapley, L.S., A Value for n-Person Games, in “Contributions to the Theory of Games” (eds. H.W. Kuhn and A.W. Tucker), Princeton, Princeton University Press, (1953), 307–315.

17. Tolwinski B., Haurie A., Leitmann G.(1986). Cooperative equilibria in differential games. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 119. – p. 182-202

18. Yeung, D.W.K., An irrational-behavior-proofness condition in cooperative differential games, Int. J. of Game Theory Rew, 9 (2007), 256–273.

19. Yeung D.W.K. and Petrosyan L.A.(2001). Proportional time-consistent solution in differential games. In: Yanovskaya E.B. (ed) International Conference on Logic, Game Theory and Social Choice, Saint-Petersburg State University, p. 254-256

20. Yeung D.W.K., Petrosjan L.A. (2006) Cooperative Stochastic Differential Games. Springer

21. Zenkevich N.A., Kolabutin N.V. (2007). Quantitative Modeling of Dynamic Stable Joint Venture. In: Preprint Volume of the 11th IFAC Symposium «Computational Economics and Financial and Industrial Systems », IFAC, Dogus University of Istanbul, Turkey, p. 68-74.

EXECUTIVE SUMMARY

Introduction

Formulation of optimal behaviors for players is a fundamental element in the theory of cooperative games. The players' behaviors satisfying some specific optimality principles constitute a solution of the game. In other words, the solution of a cooperative game is generated by a set of optimality principles (for instance, the Shapley value [Shapley, 1953], the von Neumann Morgenstern solution [Neumann, Morgenstern, 1944] and the Nash bargaining solution [Nash, 1953]). For dynamic games, an additional stringent condition on their solutions is required: the specific optimality principle must remain optimal at any instant of time throughout the game along the optimal state trajectory chosen at the outset. This condition is known as *dynamic stability or time consistency*. Assume that at the start of the game the players adopt an optimality principle (which includes the consent to maximize the joint payoff and an agreed upon payoff distribution principle). When the game proceeds along the "optimal" trajectory, the state of the game changes and the optimality principle may not be feasible or remain optimal to all players. Then, some of the players will have an incentive to deviate from the initially chosen trajectory. If this happens, instability arises. In particular, the dynamic stability of a solution of a cooperative differential game is the property that, when the game proceeds along an "optimal" trajectory, at each instant of time the players are guided by the same optimality principles, and yet do not have any ground for deviation from the previously adopted "optimal" behavior throughout the game. The question of dynamic stability in differential games has been rigorously explored in the past three decades (detailed analysis of the problem see [Petrosyan, Zenkevich, 2007]). A. Haurie raised the problem of instability when the Nash bargaining solution is extended to differential games [Haurie, 1976]. Leon Petrosjan [Petrosjan, 1977] formalized the notion of dynamic stability (time consistency) in solutions of differential games. Kydland and Prescott (Nobel Prize 2004) found time inconsistency of optimal plans [Kydland, Prescott, 1977]. In [Petrosjan, Danilov, 1982] introduced the notion of "imputation distribution procedure" for cooperative solution. In [Tolwinski et al., 1986] investigated cooperative equilibria in differential games in which memory-dependent strategies and threats are introduced to maintain the agreed-upon control path. L. Petrosjan in [Petrosjan, 1993] and [Petrosjan, Zenkevich, 1996] presented a detailed analysis of dynamic stability in cooperative differential games, in which the method of regularization was introduced to construct time-consistent solutions. Yeung and Petrosjan designed time-consistent solutions in differential games and characterized the conditions that the allocation-distribution procedure must satisfy [Yeung, Petrosjan, 2001]. L. Petrosjan employed the regularization method to construct time-consistent bargaining procedures [Petrosjan, 2003]. Petrosjan and Zaccour presented time-consistent Shapley value allocation in a differential game of pollution cost reduction [Petrosjan, Zaccour, 2003].

There are three important aspects which must be taken into account when the problem of stability of long-range cooperative agreements is investigated: time-consistency (dynamic stability) of the cooperative agreements, strategic stability and irrational behavior proofness. *Time-consistency (TC)* involves the property that, as the cooperation develops cooperating partners are guided by the same optimality principle at each instant of time and hence do not possess incentives to deviate from the previously adopted cooperative behavior. *Strategic stability (SS)* means that the agreement is to be developed in such a manner that at least individual deviations from the cooperation by each partner will not give any advantage to the deviator. This means that the outcome of cooperative agreement must be attained in some Nash equilibrium, which will guarantee the strategic support of the cooperation. *Irrational behavior proofness (IBP)* must be also taken in account since not always one can be sure that the partners will behave rational on a long time interval for which the cooperative agreement is valid. The partners involved in the cooperation must be sure that even in the worst case scenario they will not loose compared with non cooperative behavior. The mathematical tool based on payoff distribution procedures (PDP) or imputation distribution procedures (IDP) is developed to deal with the above mentioned aspects of cooperation. These mathematical tools have been applied to construct *stable joint venture.*

Joint venture model

Consider a dynamic joint venture in which there are n firms. The state dynamics of the i^{th} firm is characterized by the set of vector-valued differential equations:

$$\dot{x}_i(s) = f_i^i[s, x_i(s), u_i(s)],\ x_i(t_0) = x_i^0,\ i \in N,$$

where $x_i \in X_i \subset R^{m_i}$ denotes the state variables of player i, $u_i \in U^i \subset compR^{l_i+}$ is the control vector of firm i. The state of firm i includes its capital stock, level of technology, special skills and productive resources. The objective of firm i is:

$$\int_{t_0}^{T} g^i[s, x_i(s), u_i(s)] \exp\left[-\int_{t_0}^{s} r(y)\,dy\right] ds + \exp\left[-\int_{t_0}^{T} r(y)\,dy\right] q^i(x_i(T)),$$

where $\exp\left[-\int_{t_0}^{s} r(y)\,dy\right]$ is the discount factor, $g^i[s, x_i(s), u_i(s)]$ the instantaneous profit, and $q^i(x_i(T))$ the terminal payment. In particular, $g^i[s, x_i(s), u_i(s)]$ and $q^i(x_i(T))$ are positively related to the level of technology x_i.

Consider a joint venture consisting of a subset of companies $K \subseteq N$. There are k firms in the subset K. The participating firms can gain core skills and technology that would be very difficult for them to obtain on their own, and hence the state dynamics of firm i in the coalition K becomes

$$\dot{x}_i(s) = f_i^K\left[s, x_K(s), u_i(s)\right],\ x_i(t_0) = x_i^0,\ i \in K$$

where $x_K(s)$ is the concatenation of the vectors $x_j(s)$ for $j \in K$. In particular, $\partial f_i^K[s, x_i, u_K] / \partial u_j \geq 0,$ for $j \neq i$. Thus positive effects on the state of firm i could be derived from the technology of other firms within the coalition. Again, without much loss of generalization, the effect of x_j on $f_i^K\left[s, x_K, u_i\right]$ remains the same for all possible coalitions K containing firms i and j.

At time t_0, the profit to the joint venture K becomes:

$$\int_{t_0}^{T} \sum_{j \in K} g^j\left[s, x_j(s), u_j(s)\right] \exp\left[-\int_{t_0}^{s} r(y)\,dy\right] ds + \sum_{j \in K} \exp\left[-\int_{t_0}^{T} r(y)\,dy\right] q^j(x_j(T))$$

To compute the profit of the joint venture K we have to consider the optimal control problem $\varpi[K; t_0, x_K^0]$.

For notational convenience, we express dynamics as:

$$\dot{x}_K(s) = f^K\left[s, x_K(s), u_K(s)\right],\ x_K(t_0) = x_K^0,$$

where u_K is the set of u_j for u_j, $j \in K$; $f^K\left[t, x_K, u_K\right]$ is a column vector containing $f_j^K\left[t, x_K, u_K\right]$ for $j \in K$.

Using Bellman's technique of dynamic programming the solution of the problem $\varpi[K; t_0, x_K^0]$ can be characterized as follows. Follows to the dynamic programming approach, it is possible to describe the solution at the following form. Denote $\psi_j^{(t_0)K_*}(t, x_K)$ firm's j optimal control (in terms of maximizing the coalition K payoff).

In the case when all the n firms are in the joint venture, that is $K = N$, the optimal control is

$$\psi_N^{(t_0)N_*}(s, x_N(s)) = \left[\psi_1^{(t_0)N_*}(s, x_N(s)), \psi_2^{(t_0)N_*}(s, x_N(s)), \ldots, \psi_N^{(t_0)N_*}(s, x_N(s))\right]$$

The dynamics of the optimal state trajectory of the grand coalition can be obtained as:

$$\dot{x}_j(s) = f_j^N\left[s, x_N(s), \psi_j^{(t_0)N_*}(s, x_N(s))\right], \; x_j(t_0) = x_j^0, \; j \in N,$$

which can also be expressed as

$$\dot{x}_N(s) = f^N\left[s, x_N(s), \psi_N^{(t_0)N_*}(s, x_N(s))\right], \; x_N(t_0) = x_N^0.$$

Let $x_N^*(t) = \left[x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_n^*(t)\right]$ denote the solution of the above equation. The optimal trajectories $\left\{x_N^*(t)\right\}_{t=t_0}^T$ characterizes the states of the participating firms within the venture period. We use $x_j^{t_*}$ to denote the value of $x_j^*(t)$ at time $t \in \left[t_0, T\right]$.

Consider the above joint venture involving n firms. The member firms would maximize their joint profit and share their cooperative profits according to the Shapley value (1953). The problem of profit sharing is inescapable in virtually every joint venture. The Shapley value is one of the most commonly used sharing mechanism in static cooperation games with transferable payoffs. Besides being individually rational and group rational, the Shapley value is also unique. Specifically, the Shapley value gives an imputation rule for sharing the cooperative profit among the members in a coalition as:

$$\Phi_v^i = \sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\left[v(K) - v(K \setminus i)\right], \; i \in N,$$

where $K \setminus i$ is the relative complement of i in K, $v(K)$ is the profit of coalition K, and $\left[v(K) - v(K \setminus i)\right]$ is the marginal contribution of firm i to the coalition K.

To maximize the joint venture's profits the firms would adopt the control vector $\left\{\psi_N^{(t_0)N*}(t, x_N^{t*})\right\}_{t=t_0}^T$ over the time $\left[t_0, T\right]$ interval, and the corresponding optimal state trajectory $\left\{x_N^*(t)\right\}_{t=t_0}^T$ would result. At time t_0 with the state $x_N^{t_0}$, the firms agree that firm i 's share of profits be:

$$v^{(t_0)i}(t_0, x_N^0) = \sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\left[W^{(t_0)K}(t_0, x_K^0) - W^{(t_0)K\backslash i}(t_0, x_{K\backslash i}^0)\right].$$

However, the Shapley value has to be maintained throughout the venture horizon $\left[t_0, T\right]$. In particular, at time $\tau \in \left[t_0, T\right]$ with the state being $x_N^{\tau*}$ the following imputation principle has to be maintained:

$$v^{(\tau)i}(\tau, x_N^{\tau*}) = \sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\left[W^{(\tau)K}(\tau, x_K^{\tau*}) - W^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_{K\backslash i}^{\tau*})\right],$$

where $i \in N$ and $\tau \in \left[t_0, T\right]$.

Note that $v^{(\tau)}(\tau, x_N^{\tau*}) = \left[v^{(\tau)1}(\tau, x_N^{\tau*}), v^{(\tau)2}(\tau, x_N^{\tau*}), \ldots, v^{(\tau)n}(\tau, x_N^{\tau*})\right]$ satisfies the basic properties of an imputation vector. Moreover, the solution optimality principle - sharing profits according to the Shapley value - is in effect at any instant of time throughout the game along the optimal state trajectory chosen at the outset. Hence time consistency is satisfied and no firms would have any incentive to depart the joint venture. Therefore this dynamic imputation principle is dynamically stable or time-consistent.

Transitory compensation or imputation distribution procedure (IDP)

Now profit distribution mechanism will be developed to compensate transitory changes so that the Shapley value principle could be maintained throughout the venture horizon. First, an imputation distribution procedure (similar to those in [Petrosyan, Zaccour, 2003] and [Yeung, Petrosyan, 2004]) must be now formulated so that the imputation scheme in condition (8) can be realized. Let $B_i(t)$ denote the payment received by firm $i \in N$ at time $t \in \left[t_0, T\right]$ dictated by $v^{(t_0)i}(t_0, x_N^0)$. In particular,

$$v^{(t_0)i}(t_0, x_N^0) = \sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\left[W^{(t_0)K}(t_0, x_K^0) - W^{(t_0)K\backslash i}(t_0, x_{K\backslash i}^0)\right] =$$

$$= \int_{t_0}^{T} B_i(s) \exp\left[-\int_{t_0}^{s} r(y)\,dy\right] ds + q^i(x_i^*(T)) \exp\left[-\int_{t_0}^{T} r(y)\,dy\right].$$

The following formula describes the rule $B_i(\tau)$ for distribution Shapley value in the time, providing time consistency of Shapley value.

$$B_i(\tau)=$$
$$-\sum_{K\subseteq N}\frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\Big\{\Big[W_t^{(\tau)K}(t,x_K^{\tau*})\,|_{t=\tau}\Big]-\Big[W_t^{(\tau)K\backslash i}(t,x_{K\backslash i}^{\tau*})\,|_{t=\tau}\Big]$$
$$+\Big[W_{x_K^{\tau*}}^{(\tau)K}(t,x_K^{\tau*})\,|_{t=\tau}\Big]\,f_K^N\Big[\tau,x_N^{\tau*},\psi_K^{(\tau)N}(\tau,x_N^{\tau*})\Big]$$
$$-\Big[W_{x_{K\backslash i}^{\tau*}}^{(\tau)K\backslash i}(\tau,x_{K\backslash i}^{\tau*})\,|_{t=\tau}\Big]\,f_{K\backslash i}^N\Big[\tau,x_N^{\tau*},\psi_{K\backslash i}^{(\tau)N}(\tau,x_N^{\tau*})\Big]\Big\},$$

where $f_K^N\left[\tau,x_N^{\tau},\psi_K^{(\tau)N}(\tau,x_N^{\tau*})\right]$ is a column vector containing $f_i^N\left[\tau,x_N^{\tau*},\psi_i^{(\tau)N}(\tau,x_N^{\tau*})\right]$, $i\in K$.

The vector $B(\tau)$ serves as a form equilibrating transitory compensation that guarantees the realization of the Shapley value imputation throughout the game horizon. Note that the instantaneous profit $B_i(\tau)$ offered to Player i at time τ is conditional upon the current state $x_N^{\tau*}$ and current time τ. One can elect to express $B_i(\tau)$ as $B_i(\tau,x_N^{\tau*})$. Hence an instantaneous payment $B_i(\tau,x_N^{\tau*})$ to player $i\in N$ yields a dynamically stable solution to the joint venture.

Stable joint venture agreement

As an example of stable cooperative agreement we consider the case when there are 2 or 3 companies involved in joint venture and share their joint profit according to the dynamic Shapley value. Through knowledge diffusion participating firms can gain core skills and technology that would be very difficult for them to obtain on their own. The evolution of the technology level of company under joint venture is known. The profit of the joint venture is the sum of the participating firms' profits. The member firms would maximize their joint profit and share their cooperative profits according to the Shapley value. Applying the method of regularization for dynamic cooperation problem, we constructed the control in the form of special payments, paid at each time instant on the optimal trajectory. The stable cooperative agreement is obtained for the joint venture dynamic model.

The main investigated model is following. Suppose, for example, that 3 companies involved in joint venture and share their joint profit according to the dynamic Shapley value. Let planning period is $[t_0,T]$. Company i profit is

$$\int_{t_0}^{T}\Big[P_i[x_i(s)]^{1/2}-c_iu_i(s)\Big]\exp[-r(s-t_0)]ds+\exp[-r(T-t_0)]q_i\,[x_i(T)]^{1/2},$$

where $i\in N$; P_i, c_i and q_i are positive constants, r is the discount rate,

$x_i(t) \in R^+$ is the level of technology of company i at time t, and $u_i(t) \in R^+$ is its physical investment in technological advancement. The term $P_i\left[x_i(t)\right]^{1/2}$ reflects the net operating revenue of company i at technology level $x_i(t)$ and $c_i u_i$ is the cost of investment, $q_i\left[x_i(T)\right]^{1/2}$ gives the salvage value of company i's technology at time T.

The evolution of the technology level of company i follows the dynamics:

$$\dot{x}_i(s) = \left[\alpha_i\left[u_i(s)x_i(s)\right]^{1/2} - \delta x_i(s)\right], x_i(t_0) = x_i^0 \in X_i,\ x_i(t_0) = x_i^0 \in X_i,$$

where $\alpha_i\left[u_i(s)x_i(s)\right]^{1/2}$ is the addition to the technology brought about by $u_i(s)$ amount of physical investment, and δ is the rate of obsolescence.

Consider the case when all these three firms agree to form a joint venture and share their joint profit according to the dynamic Shapley. Through knowledge diffusion participating firms can gain core skills and technology that would be very difficult for them to obtain on their own. The evolution of the technology level of company i under joint venture becomes:

$$\dot{x}_i(s) = \left[\alpha_i\left[u_i(s)x_i(s)\right]^{1/2} + b_j^{[j,i]}\left[x_j(s)x_i(s)\right]^{1/2} + b_k^{[k,i]}\left[x_k(s)x_i(s)\right]^{1/2} - \delta x_i(s)\right]$$

$$x_i(t_0) = x_i^0 \in X_i \quad \text{for } i \neq j \neq k,$$

where $b_j^{[j,i]}$ and $b_k^{[k,i]}$ are non-negative constants. In particular, $b_j^{[j,i]}\left[x_j(s)x_i(s)\right]^{1/2}$ represents the technology transfer effect under joint venture on firm i brought about by firm j's technology.

The profit of the joint venture is the sum of the participating firms' profits:

$$\int_{t_0}^{T}\sum_{j=1}^{3}\left[P_j\left[x_j(s)\right]^{1/2} - c_j u_j(s)\right]\exp\left[-r(s-t_0)\right]ds$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\exp\left[-r(T-t_0)\right]q_j\left[x_j(T)\right]^{1/2}.$$

Giving up technical calculation, we have

$$f_i^{\{1,2,3\}}\left[\tau, x_1^{\tau*}, x_2^{\tau*}, x_3^{\tau*}, \psi_i^{(\tau)\{1,2,3\}}(\tau, x_1^{\tau*}, x_2^{\tau*}, x_3^{\tau*})\right] =$$
$$= \frac{\alpha_i^2}{4c_i}A_i^{\{1,2,3\}}(\tau)\left(x_i^{\tau*}\right)^{1/2} + b_j^{[j,i]}\left[x_j^{\tau*}x_i^{\tau*}\right]^{1/2} + b_k^{[k,i]}\left[x_k^{\tau*}x_i^{\tau*}\right]^{1/2} - \delta x_i^{\tau*}.$$

Denoting $\left[x_1^{\tau*}, x_2^{\tau*}, x_3^{\tau*}\right]$ by $x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}$, we can write

$$f_{\{i,j\}}^{\{1,2,3\}}\left[\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}, \psi_i^{(\tau)\{1,2,3\}}\left(\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}\right), \psi_j^{(\tau)\{1,2,3\}}\left(\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}\right)\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} f_i^{\{1,2,3\}}\left[\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}, \psi_i^{(\tau)\{1,2,3\}}\left(\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}\right)\right] \\ f_j^{\{1,2,3\}}\left[\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}, \psi_j^{(\tau)\{1,2,3\}}\left(\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}\right)\right] \end{bmatrix}$$

for $i, j \in \{1,2,3\}$ and $i \neq j$,

$$f_{\{1,2,3\}}^{\{1,2,3\}}\left[\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}, \psi_1^{(\tau)\{1,2,3\}}\left(\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}\right), \psi_2^{(\tau)\{1,2,3\}}\left(\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}\right), \psi_3^{(\tau)\{1,2,3\}}\left(\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}\right)\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} f_1^{\{1,2,3\}}\left[\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}, \psi_1^{(\tau)\{1,2,3\}}\left(\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}\right)\right] \\ f_2^{\{1,2,3\}}\left[\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}, \psi_2^{(\tau)\{1,2,3\}}\left(\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}\right)\right] \\ f_3^{\{1,2,3\}}\left[\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}, \psi_3^{(\tau)\{1,2,3\}}\left(\tau, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}\right)\right] \end{bmatrix}.$$

After analytical transformation we have

$$W_t^{(\tau)\{1,2,3\}}\left(t, x_{\{1,2,3\}}^{\tau*}\right)\Big|_{t=\tau} = \left[\dot{A}_1^{\{1,2,3\}}(\tau)\left(x_1^{\tau*}\right)^{1/2} + \dot{A}_2^{\{1,2,3\}}(\tau)\left(x_2^{\tau*}\right)^{1/2}\right.$$
$$\left.\dot{A}_3^{\{1,2,3\}}(\tau)\left(x_3^{\tau*}\right)^{1/2} + \dot{C}^{\{1,2,3\}}(\tau)\right] -$$
$$-r\left[A_1^{\{1,2,3\}}(\tau)\left(x_1^{\tau*}\right)^{1/2} + A_2^{\{1,2,3\}}(\tau)\left(x_2^{\tau*}\right)^{1/2} +\right.$$
$$\left.+A_3^{\{1,2,3\}}(\tau)\left(x_3^{\tau*}\right)^{1/2} + C^{\{1,2,3\}}(\tau)\right]$$

$$W_t^{(\tau)\{i,j\}}\left(t, x_{\{i,j\}}^{\tau*}\right)\Big|_{t=\tau} =$$
$$=\left[\dot{A}_i^{\{i,j\}}(\tau)\left(x_i^{\tau*}\right)^{1/2} + \dot{A}_j^{\{i,j\}}(\tau)\left(x_j^{\tau*}\right)^{1/2} + \dot{C}^{\{i,j\}}(\tau)\right] -$$
$$-r\left[A_i^{\{i,j\}}(\tau)\left(x_i^{\tau*}\right)^{1/2} + A_j^{\{i,j\}}(\tau)\left(x_j^{\tau*}\right)^{1/2} + C^{\{i,j\}}(\tau)\right],$$

for $i \neq j$.

$$W_t^{(\tau)i}\left(t, x_i^{\tau*}\right)\Big|_{t=\tau} = \left[\dot{A}_i^{\{i\}}(\tau)x_i^{\tau*} + \dot{C}^{\{i\}}(\tau)\right] - r\left[A_i^{\{i\}}(\tau)x_i^{\tau*} + C^{\{i\}}(\tau)\right],$$

for $i \in \{1,2,3\}$.

$$W_{x_i^{\tau*}}^{(\tau)K}\left(t, x_K^{\tau*}\right)\Big|_{t=\tau} = \frac{1}{2}A_i^K(\tau)\left(x_i^{\tau*}\right)^{-1/2},$$

for $i \in K \subseteq \{1,2,3\}$.

Note that coefficients A_i, C_j are the solutions of linear differential equation system. The explicit solution is not stated here because of its lengthy expressions.

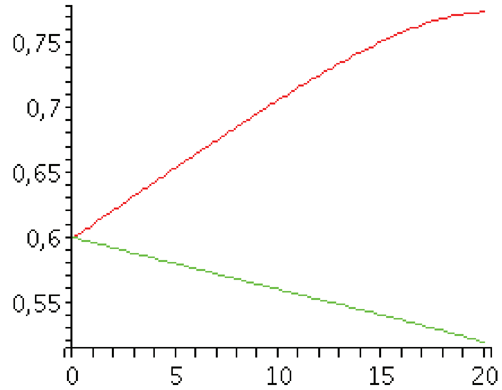
Using above equations we can obtain the form for $B_i(\tau)$. A payment $B_i(\tau)$ offered to player $i \in \{1,2,3\}$ at time $\tau \in [t_0, T]$ will lead to the realization of the dynamic Shapley value. Hence a dynamic stable solution to the joint venture will result. Quantitative results also show that the solution will be stable (SS and IBP properties are also satisfied).

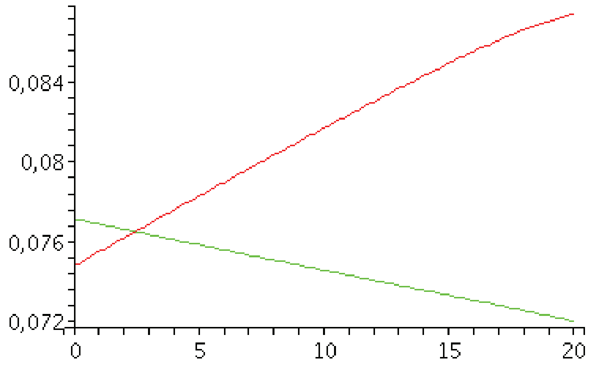
Quantitative example

Consider (as an example) a partial case of the model for 2 players with parameters [Zenkevich, Kolabutin, 2007]:

$$r = 0.2,\ \delta = 0.01,\ q_1 = 0.2,\ q_2 = 0.2,\ P_1 = 0.1,\ P_2 = 0.1,\ c_1 = 0.5,\ c_2 = 0.5,$$
$$b_1 = 0.3,\ b_2 = 0.3,\ a_1 = 0.3,\ a_2 = 0.1,\ t_0 = 0,\ T = 20,\ x_1(0) = 0.6,\ x_2(0) = 0.6$$

Than trajectories of individual behavior and profits is (increasing function – firm 1, decreasing function – firm 2):





Firm’s trajectories and profits under cooperation in joint venture after transitory compensation: